Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

M1 : Optimisation

Devoir N. 2

Exercice 1
Soit $A \in M_n(I\!R)$ une matrice symétrique définie positive et $b \in I\!R^n$. On note par ${}_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et on suppose que $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$.
On considère la fonctionnelle J définie sur $I\!R^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_2 - (b, v)_2,$$

et le sous-ensemble de $I\!R^n$ défini par $\{v \in I\!R^n,\ Cv = 0\}$, où C est une matrice de $M_{m,n}(I\!R)$ $(m < n)$ de **rang** m.
On souhaite résoudre numériquement le problème (P) : trouver $u \in U$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

Pour approcher la solution de ce problème, on propose l'algorithme suivant :

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= u^k - \rho_1(Au^k - b +^t C\lambda^k), \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \rho_1\rho_2 Cu^{k+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

où ρ_1, ρ_2 sont deux nombres strictement positifs et (u^0, λ^0) sont donnés dans $I\!R^n \times I\!R^m$.
0. Justifier rapidement que ce problème d'optimisation sous contraintes admet une unique solution et établir que les conditions d'optimalité sont données par

$$\begin{cases} Au +^T C\lambda = b \\ Cu = 0. \end{cases} \tag{2}$$

1. Justifier que pour $X \neq 0$, on a

$$\frac{\|X - \rho_1 AX\|_2}{\|X\|_2} \leq \max_{1 \leq i \leq n} |1 - \rho_1\lambda_i|,$$

puis donner un intervalle $[a,b]$ tel que si $\rho_1 \in [a,b]$, on a alors

$$\beta := \|Id - \rho_1 A\|_2 < 1.$$

2. Établir l'inégalité

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 \leq \|\lambda^k - \lambda\|^2 + (\rho_1\rho_2)^2 \|{}^tCC\|_n \|u^{k+1} - u\|^2 + 2\rho_1\rho_2 (Cu^{k+1}, \lambda^k - \lambda).$$

3. Montrer que l'on a

$$\|u^{k+1} - u\| = ((Id - \rho_1 A)(u^k - u), u^{k+1} - u) - \rho_1 ({}^tC(\lambda_k - \lambda), u^{k+1} - u).$$

4. Déduire de ce qui précède que

$$\begin{aligned} &\left(1 - \tfrac{\rho_1^2\rho_2}{2}\|{}^tCC\| - \beta\right) \|u^{k+1} - u\|^2 \\ &\leq \left(\frac{\|\lambda^k - \lambda\|^2}{2\rho_2} + \frac{\beta}{2}\|u^k - u\|^2\right) - \left(\frac{\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2}{2\rho_2} + \frac{\beta}{2}\|u^{k+1} - u\|^2\right). \end{aligned}$$

5. Comment faut-il choisir ρ_2 pour déduire de la question précédent la convergence de la suite (u_k) ?
6. Montrer qu'alors ${}^tC(\lambda_k - \lambda)$ tend vers 0. Qu'en déduit-on sur (λ^k) ?