Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

M1 : Optimisation

Correction devoir N.2

0. L'ensemble U est un convexe fermé de $I\!R^n$ puisque, d'une part, c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $u \mapsto Cu$, d'autre part, un sous-espace vectoriel de $I\!R^n$. J est strictement convexe et coercive (démontré par exemple dans le TD 1 et dit 100 fois !). Il existe donc un unique $u \in U$ solution du problème de minimisation. Les relations (2) ont été établies dans le TD 6, exercice 3.
1. Soient $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \lambda_n$ les n valeurs propres de A (A est diagonalisable car symétrique). Elles sont toutes strictement positives puisque A est définie positive. Si A est symétrique alors $I - \rho_1 A$ est symétrique, et de plus, on a dans ce cas

$$\|I - \rho_1 A\|_2 = \rho(I - \rho_1 A).$$

Les valeurs propres de la matrice $I - \rho_1 A$ sont données par $1 - \rho_1\lambda_1, \cdots, 1 - \rho_1\lambda_n$. On a

$$\|I - \rho_1 A\|_2 = \max(|1 - \rho_1\lambda_1|, |1 - \rho_1\lambda_n|).$$

Une étude de la fonction $\rho \mapsto \max\{|1-\rho\lambda_1|; |1-\rho\lambda_n|\}$ sur l'intervalle $[0, \frac{2}{\lambda_n}]$ permet d'assurer que si le paramètre ρ appartient à $[a, b]$ avec $0 < a < b < \frac{2}{\lambda_n}$, alors $\|Id - \rho_1 A\|_2 < 1$ (cette étude a été menée en travaux dirigés).
Conclusion : Si $\rho_1 \in [a, \frac{2}{\lambda_n}[$ $(0 < a < \frac{2}{\lambda_n})$, alors on a

$$\beta < 1.$$

2. On a

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 = \|\lambda^k - \lambda + \rho_1\rho_2 C u^{k+1}\|^2.$$

On en déduit en développant le membre de gauche et en retranchant le terme Cu (qui est nul), que

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 = \|\lambda^k - \lambda\|^2 + 2(\lambda^k - \lambda, \rho_1\rho_2 C u^{k+1}) + \|\rho_1\rho_2 C(u^{k+1} - u)\|^2.$$

Utilisant l'inégalité

$$\begin{aligned}&(C(u^{k+1} - u), C(u^{k+1} - u) = ({}^tCC(u^{k+1} - u), (u^{k+1} - u)\\ &\leq \|{}^tCC(u^{k+1} - u)\|.\|u^{k+1} - u\| \leq \|{}^tCC\|.\|u^{k+1} - u\|^2.\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\|\lambda^{k+1}-\lambda\|^2 \leq \|\lambda^k-\lambda\|^2+2\rho_1\rho_2(\lambda^k-\lambda, Cu^{k+1})+(\rho_1\rho_2)^2\|{}^tCC\|.\|u^{k+1}-u\|^2.$$

3. On a en utilisant la première égalité de (1)

$$(Id-\rho_1 A)(u^k-u)-\rho_1^t C(\lambda^k-\lambda) = u^k-\rho_1(Au^k-b+{}^tC\lambda^k)-u+\rho_1 Au+\rho_1^t C\lambda-\rho_1 b,$$

d'où

$$\begin{array}{l} ((Id-\rho_1 A)(u^k-u)-\rho_1^t C(\lambda^k-\lambda), u^{k+1}-u) \\ = (u^k-\rho_1(Au^k-b+^t C\lambda^k)-u+\rho_1 Au+\rho_1^t C\lambda-\rho_1 b, u^{k+1}-u). \end{array}$$

Comme $Au-b+^tC\lambda=0$, et compte tenu de la définition de u^{k+1}, on obtient l'égalité désirée.
4. RemplaÃ§ons le terme $2\rho_1\rho_2(Cu^{k+1}-Cu, \lambda^k-\lambda)$ $(Cu=0)$ qui apparaÃ®t dans l'inégalité obtenue en 2. par le terme obtenu en 3. Combinant ainsi les deux expressions, on obtient (et utilisant le fait que $Cu=0$)

$$\begin{array}{l} \|\lambda^{k+1}-\lambda\|^2 \leq \|\lambda^k-\lambda\|^2 \\ +(\rho_1\rho_2)^2\|{}^tCC\|\|u^{k+1}-u\|^2+2\rho_2\left(-\|u^{k+1}-u\|^2+((Id-\rho_1 A)(u^k-u), u^{k+1}-u)\right). \end{array}$$

On divise alors chaque membre de l'inégalité par $2\rho_2$, et on obtient après quelques calculs élémentaires visant à faire apparaÃ®tre le membre de gauche de l'inégalité recherchée

$$(1-\frac{\rho_1^2\rho_2}{2}\|{}^tCC\|)\|u^{k+1}-u\|^2 \leq \frac{\|\lambda^k-\lambda\|^2}{2\rho_2}-\frac{\|\lambda^{k+1}-\lambda\|^2}{2\rho_2}+((Id-\rho_1 A)(u^k-u), u^{k+1}-u).$$

Considérons le terme $((Id-\rho_1 A)(u^k-u), u^{k+1}-u)$ dans le membre de droite de l'inégalité précédente. On peut le majorer par $\beta\|u^k-u\|\|u^{k+1}-u\|$. On utilise alors l'inégalité élémentaire $2ab \leq a^2+b^2$ pour obtenir l'inégalité

$$\beta\|u^k-u\|\|u^{k+1}-u\| \leq \frac{\beta}{2}(\|u^{k+1}-u\|^2+\|u^k-u\|^2).$$

On obtient alors

$$\begin{array}{l} (1-\frac{\rho_1^2\rho_2}{2}\|{}^tCC\|)\|u^{k+1}-u\|^2 \\ \leq \frac{\|\lambda^k-\lambda\|^2}{2\rho_2}-\frac{\|\lambda^{k+1}-\lambda\|^2}{2\rho_2}+\frac{\beta}{2}(\|u^{k+1}-u\|^2+\|u^k-u\|^2) \end{array}$$

Ajoutant aux deux membres de l'inégalité précédente l'expression $-\beta\|u^{k+1}-u\|^2$, on obtient finalement

$$\begin{array}{l} \left(1-\frac{\rho_1^2\rho_2}{2}\|{}^tCC\|-\beta\right)\|u^{k+1}-u\|^2 \\ \leq (\dfrac{\|\lambda^k-\lambda\|^2}{2\rho_2}+\dfrac{\beta}{2}\|u^k-u\|^2)-(\dfrac{\|\lambda^{k+1}-\lambda\|^2}{2\rho_2}+\dfrac{\beta}{2}\|u^{k+1}-u\|^2). \end{array}$$

5. Naturellement, on doit montrer que (u^k) converge vers u. On remarque d'après la question 4. que la suite $(\frac{\|\lambda^k-\lambda\|^2}{2\rho_2}+\frac{\beta}{2}\|u^k-u\|^2)$ est décroissante si ρ_2 est choisi assez petit. Précisément, il suffit de prendre ρ_2 assez petit de telle sorte que

$$1-\frac{\rho_1^2\rho_2}{2}\|^tCC\|-\beta>0,$$

soit, puisque $1-\beta>0$

$$0<\rho_2<\frac{1-\beta}{\frac{\rho_1^2}{2}\|^tC.C\|},$$

pour obtenir d'après 4. l'inégalité

$$\frac{\|\lambda^k-\lambda\|^2}{2\rho_2}+\frac{\beta}{2}\|u^k-u\|^2\leq\frac{\|\lambda^{k+1}-\lambda\|^2}{2\rho_2}+\frac{\beta}{2}\|u^{k+1}-u\|^2.$$

Cette suite étant à termes positifs, décroissante, elle converge. Mais l'inégalité obtenue en 4. implique que (u_k) converge vers u puisque le membre de droite de cette inégalité tend vers 0.
6. Puisque (u^k) converge vers u, soustrayant l'équation de récurrence satisfaite par u^k et l'équation satisfaite par u multipliée par ρ_1, on obtient

$$u^{k+1}=u^k-\rho_1(A(u^k-u)+^t C(\lambda^k-\lambda).$$

On en déduit que $(^tC(\lambda^k-\lambda))$ tend vers 0 puisque u^k tend vers u. Comme C est de rang m, la transposée de C est de rang m, donc le noyau de ^tC est réduit à 0. On en déduit que λ^k tend vers λ.

Correction de la question numéro 3 de l'exercice 2 du TD 7.

Le cas $U=\{v\in I\!\!R^n;\ v\geq 0\}$ a été traité en TD. Traitons de manière analogue le cas $U:=\prod_{i=1}^n[a_i,b_i]$. Soit $u\in I\!\!R^n$. Notons dans un premier temps que U est fermé (le produit cartésien de n ensembles fermés de $I\!\!R$ est fermé) et convexe (le produit cartésien de n ensembles convexes de $I\!\!R$ est convexe). U est clairement non vide, on peut donc appliquer le théorème de projection sur un convexe fermé.
Le cas $n=2$ permet de "deviner" l'expression du projeté, noté $P_U(u)$ dans le cas général. Le cas $n=2$ conduit à penser que si $u_i\leq a_i$, alors $P_U(u)_i=a_i$, si $a_i\leq u_i\leq b_i$ alors $P_U(u)_i=u_i$, enfin, si $b_i<u_i$, alors $P_U(u)_i=b_i$. Pour établir que l'élément de $I\!\!R^n$ ainsi défini est bien le projeté, il suffit de démontrer qu'il satisfait la caractérisation de $P_U(u)$ établie en analyse fonctionnelle,

à savoir que $(P_U(u) - u, v - P_U(u)) \geq 0$ pour tout $v \in U$.
On a, compte tenu de la définition de $P_U(u)$

$$(P_U(u) - u, v - P_U(u)) =$$
$$\sum_{i|u_i \leq a_i} (a_i - u_i)(v_i - a_i) + \sum_{i|a_i < u_i \leq b_i} (u_i - u_i)(v_i - u_i) + \sum_{i|u_i > b_i} (b_i - u_i)(v_i - b_i).$$

Il est clair que le membre de droite de l'égalité précédente est positif, on en déduit donc le résultat recherché.
Dans le cas général, la méthode du gradient projeté sur U consiste à construire la suite (u_k) définie par

$$u_{k+1} = P_U(u_k - \rho \nabla J(u_k)).$$

Dans le cas $U := I\!\!R^n_+$ et J égale à la fonctionnelle quadratique, on obtient

$$u^i_{k+1} = \max(u^i_k - \rho(Au_k - b)_i, 0), \quad i = 1, \cdots, n$$

u^i_k représentant la ième coordonnée du vecteur u_k.