Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

M1 : Optimisation

TD 8

Exercice 1
On considère le problème (P) : déterminer $u = (u_1, u_2) \in I\!R^2$ avec $u \in U := \{(u_1, u_2 \in I\!R^2 |\, u_1^2 + u_2^2 \geq 1\}$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v),$$

où $J(v) = v_1^4 + 3v_2^4$.
1. Montrer que le problème (P) usuel admet au moins une solution.
2. Écrire les relations de Kuhn et Tucker.
3. Résoudre le problème (P).

Exercice 2
On considère la fonction définie sur $I\!R^2$ par

$$J(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$$

et

$$C := \{(x_1, x_2) \in I\!R^2 |\, x_1^4 + x_2^4 \leq 1\}.$$

1. Montrer qu'il existe $u \in C$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

2. Écrire les relations de Kuhn et Tucker.
3. Résoudre le problème (P).

Exercice 3
On considère une fonctionnelle α-elliptique J définie sur $I\!R^n$ et on pose :

$$U = \{v \in I\!R^n;\ \ Cv \leq d\}, \quad C \in M_{m,n}(I\!R),\ d \in I\!R^m.$$

On suppose que U est non vide.
On considère le problème (P) (problème primal) trouver $u \in U$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

1. Justifier que le problème primal admet une unique solution notée u et qu'il existe un vecteur $\lambda \in I\!R_+^m$ tel que le couple (u, λ) soit point selle du Lagrangien L associé au problème primal (P) que l'on explicitera (on introduira la fonction $\phi(v) = Cv - d$).

2. Montrer que

$$\begin{cases} \nabla J(u) +^t C\lambda = 0, \\ \lambda = P_+(\lambda + \rho\phi(u)) \end{cases}$$

où P_+ désigne l'opérateur de projection sur $I\!R_+^m$ et ρ un réel strictement positif.
Indication : pour obtenir la seconde égalité, utiliser le fait que $L(u, \lambda) = \sup_{\mu \in I\!R_+^m} L(u, \mu)$ ainsi que l'inéquation d'Euler appliquée convenablement.
3. Décrire la méthode d'Uzawa appliquée au problème primal. On note par (λ_k, u_k) la suite introduite dans la méthode d'Uzawa.
4. Montrer que

$$\begin{cases} \nabla J(u^k) +^t C\lambda^k = 0, \\ \lambda^{k+1} = P_+(\lambda^k + \rho\phi(u^k)). \end{cases}$$

Dans la suite, on suppose que

$$0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|C\|^2}.$$

5. Montrer que

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda\|_m \leq \|\lambda_k - \lambda + \rho C(u_k - u)\|_m,$$

puis en déduire que

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda\|_m^2 \leq \|\lambda_k - \lambda\|_m^2 - \rho\{2\alpha - \rho\|C\|^2\}\|u_k - u\|_n^2.$$

6. En déduire que la suite (u_k) converge vers u.

On suppose à présent que la matrice C est de rang m.
7. Montrer l'existence et l'unicité de la solution λ du problème dual.