Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

M1 : Optimisation

TD 6

Exercice 1
On considère une fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^n$ α-elliptique.
On considère le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$K := \{X \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} X_i = 1\}.$$

1. Montrer que le problème trouver $u \in K$ tel que $J(u) = \inf_{v \in K} J(v)$ admet une unique solution.
2. Quelle condition satisfait l'élément u trouvé en 1 ?
Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On considère le problème $Y_0 \in K$ tel que

$$\|X - Y_0\| = \inf_{Y \in K} \|X - Y\|.$$

3. Montrer que ce problème admet une unique solution, notée $P_K(X)$ puis que
$$P_K(X) = X + \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} X_i}{n}(1, 1, \cdots, 1)^t.$$

Exercice 2
On veut déterminer les solutions du problème

$$\inf(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que le problème admet au moins une solution.
2. Montrer qu'il existe une unique solution et déterminez-la.

Exercice 3
On considère la fonctionnelle J définie sur $I\!R^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_2 - (b, v)_2$$

où $(.,.)_2$ représente le produit scalaire de $I\!R^n$, $A \in M_n(I\!R)$ est symétrique et définie positive et b est un vecteur de $I\!R^n$.

On cherche les extremums de la fonctionnelle J par rapport à un ensemble de la forme

$$U = \{v \in I\!R^n; \;\; Cv = d\},$$

où $C \in M_{m,n}(I\!R)$ et $d \in I\!R^n$ $(m < n)$. On suppose la matrice C de rang m.
1. Montrer que U est un convexe fermé non vide de $I\!R^n$.
2. Montrer que si J admet en un point $u \in U$ un extremum relatif par rapport à l'ensemble U alors il existe $(u, \lambda) \in I\!R^n \times I\!R^m$ tel que

$$\begin{cases} Au +^T C\lambda = b \\ Cu = d. \end{cases} \qquad (2)$$

Indication : on introduira les fonctions H_i $(i \in \{1, \cdots, m\})$ définies sur$I\!R^n$ par

$$H_i(x) := \sum_{j=1}^{n} C_{i,j} x_j,$$

puis on appliquera le théorème des extémas liés.
3. Exprimer u en fonction de A, b, d et C. On montrera que

$$u = A^{-1}b - A^{-1t}C(CA^{-1}\,{}^tC)^{-1}CA^{-1}b + A^{-1t}C(CA^{-1}\,{}^tC)^{-1}d.$$

Indication : on montrera que la matrice $CA^{-1}\ {}^tC$ est inversible, puis on exprimera λ en fonction de A, C, b et d.