Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

M1 : Optimisation

TD 5

Exercice 1

Soit $\alpha > 0$. On considère la suite de nombres réels (x_k) définie par

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{\alpha}{x_k}), \quad x_0 \in I\!R_+^*.$$

1. Étudier la convergence de (x_k).
2. Quelle méthode itérative a-t-on illustréà la question précédente ?

Exercice 2

On rappelle que si $A \in M_n(I\!R)$, $\|A\| < 1$, $\|.\|$ norme matricielle quelconque, alors la matrice $Id - A$ est inversible, et de plus, son inverse est donnée par $\sum_{n=0}^{+\infty} A^k$.

Pour $A \in GL_n(I\!R)$ et $A_0 \in M_n(I\!R)$, on définie la méthode itérative suivante pour $k \geq 0$

$$A_{k+1} = 2A_k - A_k A A_k.$$

0. Montrer que

$$\mathrm{Id} - AA_{k+1} = (\mathrm{Id} - AA_k)^2,$$

puis que, sous l'hypothèse $\rho(\text{Id-A}A_0) < 1$, la matrice A_k est inversible pour tout $k \geq 1$.

1. Montrer que la suite matricielle (A_k) converge vers A^{-1} si et seulement si $\rho(\mathrm{Id} - AA_0) < 1$.
2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|A_{k+1} - A^{-1}\| \leq C\|A_k - A^{-1}\|^2.$$

(indication : développer $(A^{-1} - A_k)A(A^{-1} - A_k)$). Qu'en déduisez-vous ?

3. On pose

$$A_0 = \frac{A^*}{\|A\|.\|A^*\|}.$$

Montrer que la méthode converge avec cette valeur initiale.

4. On considère l'application $\mathcal{F}$ définie par pour $M \in GL_n(I\!R)$ par

$$\mathcal{F}(M) = M^{-1} - A.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est différentiable et que

$$\mathcal{F}'(M).N = -M^{-1}NM^{-1}.$$

5. Décrire la méthode de Newton appliquéeà $\mathcal{F}$.
6. À quelle condition sur la donnée initiale A_0 la méthode obtenue en 5. converge-t-elle ?

Exercice 3
On se donne une famille d'éléments

$$A_k(x) \in \mathrm{Isom}(X;Y), \quad k \in I\!N; x \in \Omega.$$

On définit alors la suite (x_k) par $x_0 \in \Omega$ et

$$x_{k+1} = x_k - A_k(x_k)^{-1} f(x_k) \ k \geq 0.$$

On suppose l'espace X complet et la fonction f dérivable dans Ω. On suppose par ailleurs qu'il existe trois constantes $r,\ M,\ \beta$ telles que :

$$r > 0 \quad \text{et} \quad B = \{x \in X;\ \|x - x_0\| \leq r\} \subset \Omega,$$

$$\sup_{k \geq 0} \sup_{x \in B} \|A_k^{-1}(x)\| \leq M, \tag{1}$$

$$\sup_{k \geq 0} \sup_{x, x' \in B} \|f'(x) - A_k(x')\| \leq \frac{\beta}{M}, \quad \beta < 1, \tag{2}$$

et

$$\|f(x_0)\| \leq \frac{r}{M}(1 - \beta). \tag{3}$$

1. Établir par récurrence les inégalités suivantes :

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq M \|f(x_{k-1})\|, \tag{4}$$

$$\|x_k - x_0\| \leq r, \tag{5}$$

$$\|f(x_k)\| \leq \frac{\beta}{M} \|x_k - x_{k-1}\|. \tag{6}$$

2. En déduire que la suite (x_k) est une suite de Cauchy.
3. Montrer que f admet au moins un zéro dans B.
4. Montrer l'unicité du zéro de f dans B.

Indication : supposer que f admet deux zéros a et b et utiliser l'identité

$$b - a = -A_0^{-1}(x_0)(f(b) - f(a) - A_0(x_0)(b - a)).$$