Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.
UFR sciences.

M1 : Optimisation

TD 4

1. Rappeler le principe de la méthode du gradient à pas variable ainsi que l'énoncé du théorème vu en cours assurant la convergence de la méthode.
On considère la fonctionnelle J définie sur $I\!R^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_2 - (b, v)_2$$

où $(.,.)_2$ représente le produit scalaire de $I\!R^n$, $A \in M_n(I\!R)$ symétrique et définie positive et b un vecteur de $I\!R^n$.
2. Montrer que la méthode du gradient à pas variable converge dans le cas de la fonctionnelle quadratique ci-dessus si le paramètre ρ_k satisfait la condition

$$\rho_k \in [a, b] \subset]0, \frac{2\lambda_1}{\lambda_n^2}[. \tag{1}$$

où λ_1 et λ_n désignent les valeurs propres extrêmes de la matrice A.
3. Soit (u_n) la suite introduite dans la méthode du gradient à pas variable et u le point en lequel J atteint son minimum.
Montrer que

$$\|u_{n+1} - u\| \leq \|Id - \rho_k A\|_2 \|u_n - u\|,$$

puis justifier que

$$\|Id - \rho_k\|_2 = \max\{|1 - \rho_k\lambda_1|; |1 - \rho_k\lambda_n|\}.$$

4. Étudier la fonction $\rho \mapsto \max\{|1-\rho_k\lambda_1|; |1-\rho_k\lambda_n|\}$ sur un intervalle convenable, puis montrer que l'on peut améliorer (1) en choisissant

$$\rho_k \in [a, \tilde{b}] \subset]0, \frac{2}{\lambda_n}[.$$

5. Déterminer la valeur optimale du paramètre ρ.

Exercice 2
On considère la fonctionnelle J définie en (1). On note par $\bar{x}$ l'unique solution du problème $Ax = b$. On pose $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$.
Dans la suite, on note par $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A classées dans l'ordre croissant. On pose $K(A) := \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

1. Soit K un sous-ensemble convexe fermé de $I\!R^n$. Montrer que les deux problèmes $\inf\{J(x), x \in K\}$ et $\inf\{\|\bar{x} - x\|_A;\ x \in K\}$ ont même solution.
Soient $x_0 \in I\!R^n$ et $k \in I\!N^*$. On pose $r_0 = b - Ax_0$ et $K_k := x_0 + vect\{r_0, Ar_0, \cdots, A^{k-1}r_0\}$.
2 a. On considère le problème

$$\inf\{J(x), x \in K_k\}$$

Montrer qu'il existe un unique $x_k \in K_k$ tel que

$$J(x_k) = \inf\{J(x), x \in K_k\}$$

2. b. Montrer que

$$\|x_k - \bar{x}\|_A = \inf\{\|P(A)(x_0 - \bar{x})\|_A,\ P \in I\!R_k[X],\ P(0) = 1\}.$$

3. Établir que

$$\|x_k - \bar{x}\|_A \leq \max_{\lambda \in \sigma(A)} |P(\lambda)| \|x_0 - \bar{x}\|_A, \quad \forall\, P \in I\!R_k[X],\ P(0) = 1$$

4. Montrer que

$$x_n = \bar{x}.$$

Pour $x \in [-1, 1]$ et $k \in I\!N$, on pose

$$T_k(x) = \cos(k\text{arcos}(x)).$$

Pour $k \geq 1$, on rappelle que T_k est un polynôme de degrés k dont le monôme de plus haut degré est 2^{k-1}. Pour $x \geq 1$ et $k \in I\!N$, on considère

$$T_k(x) := \frac{1}{2}\left((x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k\right).$$

5. Pour $x \in [\lambda_1, \lambda_n]$, on pose

$$Q_k(x) = \frac{T_k(\dfrac{\lambda_n + \lambda_1 - 2x}{\lambda_n - \lambda_1})}{T_k(\frac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1})}.$$

Montrer que Q_k est bien défini, puis établir l'inégalité

$$T_k(\frac{\lambda_n + \lambda_1}{\lambda_n - \lambda_1}) \geq \frac{(\sqrt{K(A)} + 1)^k}{(\sqrt{K(A)} - 1)^k}.$$

6. En déduire que si $x \in [\lambda_1, \lambda_n]$, on a

$$|Q_k(x)| \leq 2\frac{(\sqrt{K(A)} - 1)^k}{(\sqrt{K(A)} + 1)^k},$$

puis que

$$\|x_k - \bar{x}\|_A \leq 2\frac{(\sqrt{K(A)} - 1)^k}{(\sqrt{K(A)} + 1)^k}\|x_0 - \bar{x}\|_A.$$

7. Commenter le résultat obtenu à la question 6.