Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

M1 : Optimisation

TD 2

Exercice 1
A. Soit $J : \Omega \subset I\!R^N \to I\!R$ une fonction dérivable sur l'ouvert Ω et U une partie convexe de Ω.
On suppose que J est deux fois continûment différentiables sur Ω.
On se propose de montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
a. J est convexe sur U.
b. $J''(u).(v-u)^2 \geq 0 \ \ \forall\, u, v \in U$.

1. Montrer que b. implique a. (utiliser la formule de Taylor avec reste de Lagrange).
Soit $u \in U$. On considère la fonction auxiliaire G définie sur U par

$$G(v) = J(v) - J'(u).v.$$

2. On suppose que J est convexe sur U. Montrer que u est un minimum de G par rapport à U.
3. Évaluer $G(u + tw) - G(u)$ où $t \in [0, 1]$ et $w = v - u$, et en déduire que a. implique b.

B. On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y}$$

sur $U = \{(x, y) \in I\!R^2,\ y > 0\}$.
La fonction f est-elle convexe sur U ?

Exercice 2
Soit U une partie convexe d'un espace vectoriel normé V. Dans cet exercice, on considère $J : \Omega \subset V \to I\!R$ une fonction convexe, définie sur un ouvert Ω de V contenant U et dérivable en un point $u \in U$.
1.a. Soient $u, v \in U$ et $w := v - u$. Montrer que $u + \theta w$ ($\theta \in [0, 1]$) est dans U et que

$$J(u + \theta w) - J(u) \leq \theta(J(v) - J(u)).$$

b. En déduire que si une fonction convexe $J : U \subset V \to I\!R$ admet un minimum relatif en un point de U, elle y admet en fait un minimum global (c'est-Ã -dire par rapport à tout l'ensemble U).
2. Montrer qu'une fonction strictement convexe $J : U \subset V \to I\!R$ admet au plus un minimum atteint en un unique point.

3. Montrer que la fonction J admet un minimum en u par rapport Ã l'ensemble U si et seulement si

$$J'(u)(v-u) \geq 0, \quad \forall\, v \in U.$$

Exercice 3

Soient $A \in M_{m,n}(I\!R)$ et $b \in I\!R^m$ $(m \neq n)$. On s'intéresse à la résolution de l'équation

$$Au = b. \tag{1}$$

On introduit alors le problème de minimisation : trouver $u_0 \in I\!R^n$ tel que

$$\|Au_0 - b\|_{2,m}^2 = \inf_{u \in I\!R^n} \|Au - b\|_{2,m}^2. \tag{2}$$

On appellera solution au sens classique des moindres carrés de (1) une solution de (2).

On associe au problème (2) la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\|Av - b\|_{2,m}^2 - \frac{1}{2}\|b\|_{2,m}^2.$$

0. Exprimer la fonctionnelle J sous la forme $\frac{1}{2}(Bv, v) - (c, v)$, puis montrer que J est convexe.
1. Montrer que u est solution de (2) si et seulement si

$$A^*Au = A^*b. \tag{3}$$

Cette équation est appelée équation normale associée au problème (2).
2. Montrer que $\ker A = \ker(A^*A)$, puis en déduire que (3) admet toujours au moins une solution.
3. Montrer que (3) possède une unique solution si et seulement si A est injective.
Que faire quand ceci tombe en défaut?

Penrose introduit alors une nouvelle notion, pseudo-inverser le système.
4. Établir qu'il existe une solution de (3) noté u^* de norme minimale et qu'elle est caractérisée par

$$r := b - Au^* \in \ker A^* \ \text{ et } \ u^* \in \operatorname{Im} A^*.$$

L'application linéaire $b \to u^*$ est le *pseudo-inverse* de Penrose.