Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

M1 : Optimisation

TD 1

Exercice 1
Soient $A, B \in M_n(I\!R)$ et $b \in I\!R^n$. Dans toute la suite, on désigne par $(.,.)_2$ le produit scalaire euclidien sur $I\!R^n$ et $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
1. Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

$$a.\ \ J_1(u) = \frac{1}{2}(Av, v)_2 - (b, v)_2, \qquad b.\ \ J_2(u) = (Au, Bu).$$

2. Déterminer la hessienne de J_1.

On considère l'application ϕ définie sur le groupe linéaire $GL_n(I\!R)$ par $\phi(A) = A^{-1}$. On veut montrer que ϕ est différentiable en tous points (et donc à fortiori continue) et que

$$\phi'(A).H = -A^{-1}HA^{-1}. \tag{1}$$

3. Soit $H \in M_n(I\!R)$ telle que $\|H\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Établir que

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}HA^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(A^{-1}H)^n\ A^{-1}.$$

4. En déduire (**??**).

Exercice 2
Soient $u \in I\!R^n$ et $A \in M_n(I\!R)$. On considère la fonctionnelle J définie sur $I\!R^n$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_2 - (b, v)_2$$

où $(.,.)_2$ représente le produit scalaire de $I\!R^n$, $A \in M_n(I\!R)$ et b un vecteur de $I\!R^n$.
On suppose dans la suite que A est symétrique, définie positive.
1. Rappeler la définition du quotient de Rayleigh R_A et donner quelques propriétés de ce quotient.
2. Démontrer que la plus petite valeur propre de A, notée λ_1, est caractérisée par

$$\lambda_1 := \min_{v \neq 0} R_A(v).$$

3. Montrer que la fonctionnelle J est coercive, c'est-à-dire que $J(v) \to +\infty$ lorsque $\|v\| \to +\infty$.
4. Montrer que J admet un point critique au point u si et seulement si

$$Au = b.$$

5. Montrer que J admet un unique minimum global sur $I\!R^n$.

Exercice 3
Soit $(a,b) \in I\!R^2$, $a < b$. On considère f une fonction continue sur $[a,b]$.
Soit ϕ l'application définie sur $I\!R_n[X]$ par

$$\phi(p) = \|f - p\|_\infty$$

1. Montrer que ϕ est continue et coercive sur $I\!R_n[X]$ (c'est-Ã -dire que $\lim_{\|p\|_\infty \to +\infty} \phi(p) = +\infty$).
2. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\inf_{p \in I\!R_n[X]} \|f - p\|_\infty = \inf_{p \in B(0,R)} \|f - p\|_\infty,$$

où $B(0,R)$ désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon R de $I\!R_n[X]$.
3. En déduire qu'il existe $P_0 \in I\!R_n[X]$ tel que

$$\|f - P_0\|_\infty = \inf_{p \in I\!R_n[X]} \|f - p\|_\infty.$$

(On montrera que l'on peut se ramener à déterminer l'infimum sur une boule fermée de centre 0 et de rayon R, puis on montrera que l'image de $B(0,R)$ par ϕ est égale à un intervalle fermé et borné de $I\!R$).

Exercice 4
Soit $J : \Omega \subset I\!R^N \to I\!R$ une fonction dérivable sur l'ouvert Ω et U une partie convexe de Ω.
On veut montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
a. J est convexe sur U.
b. $\forall\, u, v \in U,\ J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u), v - u)$.
c. $\forall\, u, v \in U,\ (\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) \geq 0$.

1. Montrer que a. implique b. puis que b. implique c.
2. On considère une fonction J telle qu'il existe $\alpha \geq 0$ satisfaisant

$$(\nabla J(v) - \nabla J(u), v - u) \geq \alpha \|u - v\|^2, \ \ \forall\, u, v \in U.$$

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$J(v) \geq J(u) + (\nabla J(u), v - u) + \alpha \|u - v\|^2, \ \ \forall\, u, v \in U.$$

3. Montrer que c. implique b.
4. Établir que b. implique a. On fera des choix convenables de u et v.