Université de Picardie Jules Verne
UFR Sciences. Année 2024-2025.

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

Examen 8 Janvier 2025

Durée : 3 heures

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. Les notes de cours sont autorisées, mais pas celles en rapport avec les travaux dirigés

Exercice 1
On considère l'application T définie sur $H := L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ par $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$ et le sous-ensemble F de H défini par

$$F := \{f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1) | \int_0^1 f(x)dx = 0\}.$$

1. Montrer que T est bien définie, linéaire et continue et déterminer sa norme.
2. Démontrer que F est un sous-ensemble non vide, convexe et fermé de $L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$.
3. Montrer que la fonction $g(x) := \ln(x) \in H$.
4. Établir qu'il existe un unique $u \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1)$ tel que

$$T(f) = (u, f)_{L^2}, \quad \forall\, f \in L^2_{\mathbb{R}}(0,1).$$

Donner la norme de u.
5. Déterminer le projeté de g sur F, puis en déduire la distance de g à F (on justifiera avec soin que ce projeté existe).

Exercice 2
Soient $\Omega =]0,1[$ et $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\Omega)$. On considère l'espace $H^1(]0,1[)$ constitué des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $g \in L^2(\Omega)$ satisfaisant

$$\int_\Omega u(x)\phi'(x)dx = -\int_\Omega g(x)\phi(x)dx, \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty.(\Omega).$$

On note $u' := g$.
On considère l'application ψ définie sur $H^1(]0,1[) \times H^1(]0,1[)$ par

$$(u,v) \mapsto \int_\Omega uv + u'v'dx.$$

1. Montrer que $H^1(]0,1[)$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\Omega)$, puis que ψ défini un produit scalaire sur $H^1(]0,1[)$.
2. Démontrer que $H^1(]0,1[)$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.
Soit $\alpha \in I\!R^*$ et $p \in C^0([0,1])$ tel que $p(x) \geq \beta > 0$. On considère l'application a définie sur $H^1(]0,1[) \times H^1(]0,1[)$ par

$$a(u,v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) + \alpha u(x)v(x)dx,$$

et l l'application définie sur sur $H^1(]0,1[)$ par $l(v) = \int_0^1 f(t)v(t)dt$.
3. Pour quelles valeurs de α peut-on assurer que le problème : trouver $u \in H^1(]0,1[)$ tel que

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in H^1(]0,1[),$$

admet une unique solution (détailler votre réponse avec précision).
4. Donner le problème d'optimisation dont la solution est l'élément u (quand il existe) trouvé à la question 2.

Exercice 3
A. Soient E un espace de Banach et $D \subset E'$ (E' dual topologique de E), D dense dans E' et $u \in E$. On considère une suite $(u_n) \subset E$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} < f, u_n > = < f, u >, \quad \forall f \in D. \tag{1}$$

Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
i. (u_n) converge faiblement vers $u \in E$.
ii. (u_n) est bornée et (1) est vérifiée.

B. Soit $p \geq 1$. Pour $n \in I\!N^*$, on considère la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} I_{[n,2n]}(t).$$

1. Étudier la convergence faible de la suite (f_n) dans $L^p(]0,+\infty[)$ pour tout $p > 1$.
2. Étudier la convergence forte de la suite (f_n) dans $L^p(]0,+\infty[)$ pour tout $p > 1$.
3. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $p = 1$.