

## Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

### Correction devoir N.2

#### Exercice 1

On considère la suite de  $L^2([0, 1])$  définie par  $u_n(x) := \sin(2\pi nx)$ . L'objectif est de montrer que  $(u_n)$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2([0, 1])$ .

On admettra le très important résultat suivant :  $C_c^\infty([0, 1])$  est dense dans  $(L^p([0, 1]), \|\cdot\|_{L^p})$  pour tout  $p \geq 1$ .

1. Effectuons une intégration par partie :

$$\int_0^1 u_n(t)\phi(t)dt = \left[ -\frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi nx)\phi(x) \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2\pi n} \cos(2\pi nx)\phi'(x)dx.$$

On en déduit l'inégalité

$$\left| \int_0^1 u_n(t)\phi(t)dt \right| \leq \frac{\|\phi'\|_\infty}{2\pi n},$$

d'où le résultat.

2. On effectue un raisonnement **par densité** (c'est très utilisé en analyse !). Soient  $\epsilon > 0$  et  $v \in L^2([0, 1])$ . Il existe  $\phi \in C_c^\infty([0, 1])$  telle que

$$\|v - \phi\|_{L^2} < \epsilon/2.$$

On a pour tout  $n$

$$|(u_n, v)_{L^2}| = |(u_n, v - \phi + \phi)_{L^2}| \leq |(u_n, \phi)| + \|u_n\|_{L^2} \|v - \phi\|_{L^2}. \quad (1)$$

Or, pour tout  $n$  (en effectuant le changement de variable  $u = 2\pi nx$ )

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 \sin^2(2\pi nt)dt = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin^2(u)du = \frac{n}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \sin^2(u)du,$$

d'où

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

On déduit alors de la question 1 et de (1) et (2), qu'il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ , pour tout  $v$

$$|(u_n, v)_{L^2}| < \epsilon.$$

On vient de prouver que  $(u_n)$  converge faiblement vers 0.

3. Si la suite  $(u_n)$  converge fortement dans  $L^2(]0, 1[)$ , alors, d'après la question 2, elle converge fortement vers 0 (la convergence forte de  $(u_n)$  vers  $u$  entraîne la convergence faible de  $(u_n)$  vers  $u$  et on a montré que  $(u_n)$  converge faiblement vers 0, donc par unicité de la limite,  $u = 0$ ). Mais pour tout  $n$ , on a  $\|u_n\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Conclusion : la suite  $(u_n)$  ne converge pas vers 0.

4. Cette question est sans rapport avec les précédentes. Il faut replacer la question dans un contexte d'analyse hilbertienne. On considère l'espace de Hilbert  $H := H^1([0, 1])$  muni de la norme induite par le produit scalaire  $(u, v)_{H^1} := \int_0^1 u'v' + uv dx$  (voir le TD 7 pour plus d'explications), et on pose  $C = \mathbb{R}[X]$ . Le convexe non vide  $C$  est inclus dans  $H^1([0, 1])$ . En effet, posons  $p(x) = ax + b$ . Alors, pour tout  $\phi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ , on obtient en effectuant une intégration par parties

$$\int_0^1 p(x)\phi'(x)dx = [p(x)\phi(x)]_0^1 - \int_0^1 a\phi'(x) = - \int_0^1 a\phi'(x)dx.$$

Ce calcul prouve que  $p \in H^1([0, 1])$  et que  $p'(x) = a$  (on prouve de façon générale que si  $f$  est de classe  $C^1$ , sa dérivée au sens usuelle coïncide avec sa dérivée au sens des distributions).

Le polynôme  $x^2$  appartient à  $H$ . Remarquons que

$$I(a, b) = \|x^2 - p\|_{H^1}^2.$$

Minimiser  $I$  sur  $\mathbb{R}^2$  revient à déterminer

$$\inf_{p \in C} \|x^2 - p\|_{H^1}^2.$$

On peut appliquer le théorème de projection sur un convexe fermé ( $C$  est un espace vectoriel de dimension finie, donc c'est un fermé). Il existe un unique  $p_0 \in C$  tel que

$$\|x^2 - p_0\|_{H^1}^2 = \inf_{p \in C} \|x^2 - p\|_{H^1}^2.$$

De plus,  $p_0 := ax + b$  est caractérisé par la relation

$$(x^2 - p_0, v)_{H^1} = 0, \quad \forall v \in C.$$

Comme  $1 \in C$  et  $x \in C$ , en particulier, on a  $(x^2 - p_0, 1)_{H^1} = (x^2 - p_0, x)_{H^1} = 0$ . On obtient ainsi un système linéaire de deux équations à deux inconnues,

donné par

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} - b + \frac{1}{3} = 0, \\ -\frac{4}{3}a - \frac{b}{2} + \frac{5}{4} = 0. \end{cases}$$

dont la solution est  $(a, b) = (1, -\frac{1}{6})$ . On obtient finalement

$$I(1, -\frac{1}{6}) = \inf_{a,b} I(a, b) = \frac{61}{180}.$$

### Exercice 2

On suppose ici  $\Omega = ]0, 1[$ . Pour  $(u, v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , on pose

$$a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 u(x) dx \int_0^1 v(x) dx.$$

1. Remarquons que  $a(., .)$  est une forme bilinéaire et symétrique. Il est clair que  $a$  est symétrique, pour prouver qu'elle est bilinéaire, il suffit de montrer que  $a(\lambda u + v, w) = \lambda a(u, w) + a(v, w)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u, v \in H^1$ . On a

$$a(\lambda u + v, w) = \int_0^1 (\lambda u + v)' w' dx + \int_0^1 (\lambda u + v)(x) dx \int_0^1 w(x) dx.$$

d'où en utilisant la linéarité de l'intégral et de la dérivation, on obtient

$$a(\lambda u + v, w) = \lambda a(u, w) + a(v, w).$$

Pour montrer que  $a$  est continue, on doit trouver une constante  $M > 0$  telle que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}, \quad \forall u, v, w.$$

Remarquons que pour tout  $u \in L^2$ ,

$$|\int_0^1 u(x) dx| \leq \int_0^1 |u(x)| dx \leq \|u\|_{L^2}$$

Il en résulte que

$$|\int_0^1 u(x) dx \int_0^1 v(x) dx| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}. \quad (3)$$

On obtient alors l'inégalité (appliquer l'inégalité de Hölder avec  $p = 2$  et l'inégalité triangulaire, ainsi que (3))

$$|a(u, v)| \leq \|u'\|_{L^2} \|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

En remarquant les inégalités évidentes  $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$  et  $\|u'\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1}$  pour tout  $u \in H^1$ , on obtient pour tout  $u, v \in H^1([0, 1])$

$$|a(u, v)| \leq 2\|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}.$$

$a(., .)$  est bien continue.

2. On doit prouver que pour tout  $f \in F'$ , la suite  $(f(T(u_n)))$  converge vers 0. Or,  $f \circ T \in E'$  puisque  $T$  est continue (la composée de deux applications continues est continue). Comme  $(u_n)$  une suite qui converge faiblement vers 0 dans  $E$ , on a  $f \circ T(u_n)$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. C'est ce qu'on voulait prouver.

3. On suppose que  $a(., .)$  n'est pas coercive. Cela signifie que quelque soit  $\alpha > 0$ , il existe  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$a(u, u) < \alpha\|u\|_{H^1}^2.$$

Posons  $\alpha = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Puisque que  $a$  n'est pas coercive, il existe  $(u_n)$  tel que

$$a\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1}}, \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1}}\right) < \frac{1}{n}.$$

Posons  $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1}}$ .  $(v_n)$  est la suite recherchée.

4. L'espace  $H^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert, donc de toute suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement. Par ailleurs, l'injection de  $L^2(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  étant compact, toute suite bornée de  $H^1(\Omega)$  admet une sous-suite qui converge fortement dans  $L^2(\Omega)$ .

De ces deux faits on déduit qu'il existe une sous-suite  $(v_{n'})$  qui converge faiblement vers  $v$  dans  $H^1$  (puisque  $(v_n)$  est bornée) et fortement vers  $w$  dans  $L^2$ . Mais l'injection de  $H^1$  dans  $L^2$  est continue, et d'après la question 2, on a que  $(v_{n'})$  converge faiblement vers  $v$  dans  $L^2$ , donc par unicité de la limite,  $v = w$ .

5. D'après la question 3., la suite  $a(v_n, v_n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Compte tenu de la définition de  $a$ , cela implique que  $\int_0^1 v_{n'}(x)dx \rightarrow 0$  et  $\|v'_{n'}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ .

6. On note la suite  $(v_{n'})$  par  $(v_n)$  pour simplifier les notations. D'après la question 5, la suite  $(v'_n)$  converge vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ , donc elle est de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  et d'après la question 4.,  $(v_n)$  est aussi de Cauchy dans  $L^2(\Omega)$  puisqu'elle converge dans cet espace.  $(v_n)$  étant alors de cauchy dans  $H^1(\Omega)$ , espace complet, donc elle converge vers  $v$ .

7. Comme  $\|v_{n'}\|_{H^1(\Omega)} = 1$  pour tout  $n$ , il en résulte que  $\|v\|_{H^1(\Omega)} = 1$ , donc  $v \neq 0$ . Montrons que  $v = 0$  (on obtient ainsi une contradiction, ce qui entraîne que  $a$  est coercive).

D'après la question 5, on a  $\int_0^1 v(x)dx = 0$ . En effet,  $(v_n)$  tend vers  $v$  dans  $L^2$ , donc, on peut en extraire une sous-suite  $(v_{n'})$  telle que  $(v_{n'})$  tend vers  $v$  p.p. et il existe une fonction  $h \in L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$  tel que  $|v_{n'}(x)| \leq h(x)$  p.p. D'après le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 v_{n'}(x)dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} v_{n'}(x)dx = \int_0^1 v(x)dx = 0.$$

Mais on a aussi  $\|v'_{n'}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|v'\|_{L^2(\Omega)} = 0$ . Par conséquent, on en déduit que  $v = C$  p.p. où  $C$  est une constante. Mais alors

$$\int_0^1 C dx = 0,$$

donc  $C = 0$ . On a obtenu la contradiction annoncée.

8. Soit  $f \in L^2(\Omega)$ . L'application  $l$  définie par  $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x)dx$  est linéaire et continue puisque

$$\left| \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}.$$

La forme bilinéaire  $a$  est continue et coercive d'après ce qui précède. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram. Il existe un unique élément  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Remarque : puisque  $a$  est symétrique, l'élément  $u$  est la solution du problème d'optimisation : trouver  $u \in H^1(\Omega)$  tel que

$$J(u) = \inf_{v \in H^1(\Omega)} J(v),$$

où

$$J(v) := \frac{1}{2} \left( \int_0^1 v'(t)^2 + v(t)^2 dt + \left( \int_0^1 v(x)dx \right)^2 - \int_0^1 f(x)v(x)dx \right).$$

### Exercice 3

1. Soit  $p \geq 1$ . On considère la suite de fonctions

$$u_n(t) = \sqrt{2n} I_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(t).$$

Si  $(u_n)$  converge faiblement dans  $L^p$ , alors elle est bornée dans  $L^p$ . Remarquons que

$$\|u_n\|_{L^p}^p = 2^{1+p/2} n^{\frac{p}{2}-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (4)$$

Il en résulte que si  $p > 2$ , la suite est non bornée. Elle ne peut converger ni faiblement, ni fortement dans ce cas.

**On suppose dans la suite que**  $p \in [1, 2]$ . Dans ce cas,  $(u_n)$  est bornée et on a

$$\|u_n\|_{L^p} \leq 2^{\frac{1}{p}+1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Le Dual de  $L^p$  s'identifie à  $L^{p'}$  où  $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$ . Montrer que  $(u_n)$  converge faiblement vers 0 dans  $L^p$  équivaut à montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(t) f(t) dt = 0, \quad \forall f \in L^{p'}. \quad (5)$$

On va, dans un premier temps, établir (5) pour des fonctions de classe  $C_c^\infty$  à support compact, espace noté  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ , puis on utilisera la densité de cette espace dans  $L^p$  pour conclure.

Cas 1. Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . On a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \phi(t) dt \right| = \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \sqrt{2n} \phi(t) dt \right| \leq \sqrt{2n} \frac{2}{n} \|\phi\|_\infty \rightarrow 0,$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Cas 2. Soient  $f \in L^{p'}$  et  $\epsilon > 0$ . Par densité de  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  dans  $L^p$ , il existe  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que

$$\|f - \phi\|_{L^{p'}} < \frac{\epsilon}{2^{\frac{1}{p}+1/2}}.$$

D'après le 1., il existe  $n_0(\epsilon)$  tel que pour tout  $n \geq n_0(\epsilon)$ , on a  $\left| \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \phi(t) dt \right| \leq \frac{\epsilon}{4}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} u_n(t) f(t) dt \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} u_n(t) (f(t) - \phi(t) + \phi(t)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} u_n(t) (f(t) - \phi(t)) dt \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} u_n(t) \phi(t) dt \right| \\ &\leq \|f - \phi\|_{L^{p'}} \|u_n\|_{L^p} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \end{aligned}$$

Conclusion:  $(u_n)$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2$ .

Étude de la convergence forte. Si  $p = 2$ , on a d'après (4)  $\|u_n\|_{L^p} = 2$  pour tout  $n$ . Donc la suite ne converge pas fortement vers 0, puisque si elle

converge vers  $x$ , on doit avoir  $x = 0$  car la convergence forte vers  $x$  implique la convergence faible vers  $x$  et on a montré que la suite converge faiblement vers 0.

Si  $p \neq 2$ , alors d'après (4),  $\|u_n\|_{L^p}$  tend vers 0 avec  $n$ : la suite converge fortement vers 0 dans ce cas.

## 2. Même question avec la suite de fonctions

$$u_n(t) = I_{[n,n+1]}(t).$$

On procède de la même façon que dans la question 1.

Cas 1. Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Notons  $S$  le support de  $\phi$ . Comme le support de  $\phi$  est compact, pour  $n$  assez grand,  $S \cap [n, n+1] = \emptyset$ . On a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) 1_{[n,n+1]}(t) dt = 0.$$

Cas 2. Soient  $f \in L^{p'}$  et  $\epsilon > 0$ . On procède comme dans l'exemple précédent en utilisant le fait que  $\|u_n\|_{L^p} = 1$  pour tout  $n$  et pour tout  $p \geq 1$  (donc, contrairement à l'exemple précédent, la suite est bornée pour tout  $p$ ). On en déduit que  $(u_n)$  converge faiblement vers 0 dans  $L^p$  pour tout  $p$ . En revanche, la suite  $(u_n)$  ne converge pas fortement dans  $L^p$  vers 0 (et vers quoi que ce soit d'autre, puisque la convergence forte vers  $x$  entraîne la convergence faible vers  $x$ ) puisque  $\|u_n\|_{L^p} = 1$  pour tout  $n$ .