Université de Picardie Jules Verne
UFR sciences. Année 2024-2025.

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

Devoir N.1

Exercice 1

4. À noter que N_3 est une norme. En effet, $N_3(x) = 0$ si et seulement si $f'(x) = 0$ sur pour tout $x \in [a, b]$ et $\int_a^b |f(s)|ds = 0$. De la première égalité, on tire que f est constante sur $[a, b]$ (égale à C) et de la seconde que $C(b-a) = 0$, soit C=0.
Il est clair que $N_3(\lambda x) = |\lambda| N_3(x)$ pour tout $\lambda \in I\!R$ et pour tout $f \in E$. Enfin, on a pour tout $f, g \in E$, par inégalité triangulaire,

$$N_3(f+g) = \int_a^b |f(s)+g(s)|ds + \|f'+g'\|_\infty \leq \int_a^b |f(s)|ds + \int_a^b |g(s)|ds + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty,$$

donc l'inégalité triangulaire $N_3(f+g) \leq N_3(f) + N_3(g)$ est satisfaite pour tout $f, g \in E$.
De

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt,$$

en posant $y = x_0$ (x_0 est défini dans le TD), en utilisant l'inégalité triangulaire et $|f'(t)| \leq \|f'\|_\infty$ pour tout t, on déduit dans un premier temps que

$$\|f\|_\infty \leq |f(x)| + \int_a^b \|f'\|_\infty dt. \qquad (1)$$

Puis, intégrant les deux membres de l'inégalité précédente entre a et b, on obtient

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(s)|ds + (b-a)\|f'\|_\infty.$$

5. Compte tenu de la définition de N_3, on a pour tout f

$$N_3(f) \leq (b-a)\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq max(1, b-a) N_1(f).$$

Cherchons à inverser cette inégalité. En ajoutant aux deux membres de (1) $\|f'\|_\infty$, on obtient :

$$N_1(f) \leq max(b-a+1, \frac{1}{b-a}) N_3(f), \quad \forall f.$$

Par conséquent, N_1 et N_3 sont équivalentes. D'après les questions précédentes, les trois normes N_1, N_2 et N_3 sont équivalentes.
6. Rappel : Théorème: Soit $(f_n) \subset E$. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $(f_n(a))$ converge. De plus, on suppose que (f_n') converge uniformément vers g. Alors (f_n) converge uniformément sur I vers $f \in E$ et $f'(x) = g(x)$ pour tout x. On a $f \in E$.
Montrons que (E, N_1) est complet. Soit $\epsilon > 0$ et (f_n) une suite de Cauchy de E. Il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$,

$$N_1(f_n - f_m) < \epsilon.$$

Compte tenu de la définition de N_1, il en résulte que (f_n) et (f_n') sont de Cauchy dans $(C^0(I), \|.\|_\infty)$, espace complet. On peut alors appliquer le théorème et en déduire que (f_n) et (f_n') converge uniformément respectivement vers f et f'. Par conséquent, (E, N_1) est complet.
Comme (E, N_1) est complet et que les trois normes sont équivalentes, il en résulte que les espaces (E, N_1), (E, N_2) et (E, N_3) sont complets.
2. Par définition,

$$\|D\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|f'\|}{N_3(f)}.$$

Compte tenu de la définition de N_3, il en résulte que D est continue et $\|D\| \leq 1$. À noter que le sup n'est pas atteint puisque si il existe $f_0 \neq 0$ telle que $\|D\| = 1 = \frac{\|f_0'\|}{N_3(f_0)}$, on obtient

$$\int_a^b |f_0(s)| ds = 0$$

donc $f_0 = 0$. Pour montrer que $\|D\| \geq 1$, construisons une suite (f_n) telle que

$$\|D\| \geq \frac{\|f_n'\|_\infty}{N_3(f_n)} \quad \forall n. \tag{2}$$

On pose $f_n(x) = e^{-n(x-a)}$. On a alors $\|f_n'\|_\infty = n$ pour tout n et

$$N_3(f_n) = n + \frac{1}{n}(1 - e^{-n(b-a)}).$$

Faisant tendre n vers l'infini dans (2), on obtient l'inégalité recherchée ($\|D\| \geq 1$). Conclusion $\|D\| = 1$.

Exercice 2 (d'après partiel 2022)
Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Soient $C^0(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ et N une norme sur $C^0(I)$. On suppose que :

a. $(C^0(I), N)$ est un $I\!R$-espace de Banach.
b. Pour toute suite (f_n) qui converge dans $(C^0(I), N)$ vers une limite f, on a (f_n) converge simplement vers f sur I.
1. On a pour tout et pour tout $f, g \in C^0(I)$, $\delta_x(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x)$. Donc δ_x est linéaire. Pour montrer la continuité de cette application, montrons que $N(f_n - f) \to 0$ entraîne $\delta_x(f_n)$ tend vers $\delta_x(f)$. C'est bien le cas en raison de l'hypothèse ii. f_n converge simplement vers f pour tout x. On obtient ainsi la continuité de δ_x. D'autre part, pour tout $f \in C^0(I)$,

$$\sup_{x\in I} |\delta_x(f)| = \|f\|_\infty < \infty.$$

2. D'après l'hypothèse a., $(C^0(I), N)$ est un $I\!R$-espace de Banach. Nous sommes sous les hypothèses du théorème de Banach-Steinhaus, δ_x est défini sur un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach, et de plus, on a prouvé la condition fondamentale dans la question 1. La conclusion du théorème de Banach-Steinhaus est exactement

$$\sup_{x\in I} \|\delta_x\|_{(C^0(I),N)'} < +\infty.$$

On peut la traduire par la condition : il existe $C > 0$ telle que pour tout $x \in I$,

$$\frac{|f(x)|}{N(f)} \leq C, \quad \forall\, f \in C^0(I).$$

ou encore en prenant le sup sur x dans l'inégalité précédente

$$\|f\|_\infty \leq CN(f), \quad \forall\, f \in C^0(I).$$

3. Ici, on peut appliquer un corollaire du théorème de Banach. Soit f une application définie sur un espace de Banach à valeurs dans un espace de Banach. On suppose f linéaire, bijective, et continue. Alors f^{-1} est continue. Considérons l'injection canonique de $(C^0(I), N)$ dans $(C^0(I), \|.\|_\infty)$. D'après la question 2, il existe $C > 0$ telle que l'on a

$$\|f\|_\infty \leq CN(f), \quad \forall\, f \in C^0(I).$$

Il résulte alors du théorème de Banach que i^{-1} est continue, soit les normes N et $\|.\|$ sont équivalentes.

Exercice 3
Soient E un espace vectoriel normé et $M \subset E$, un sous-espace vectoriel. E' représente l'ensemble des formes linéaires continues sur E.
On pose $M^\perp = \{f \in E' \mid f(x) = 0,\ \forall\, x \in M\}$. On considère une suite (f_n)

d'éléments de $M^\perp$ convergeant vers f dans E'. A-t-on $f \in M^\perp$? On a pour tout $x \in E$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{E'} \|x\|.$$

Comme $f_n(x) = 0$ pour tout x et pour tout n, et $\|f_n - f\|_{E'}$ tend vers 0 quand n tends vers $+\infty$, il en résulte que $f(x) = 0$. $M^\perp$ est donc fermé. En procédant de la même façon, on montre que $N^\perp$ est fermé.

2. Montrer que $\bar{M} \subset (M^\perp)^\perp$.

Par définition, $(M^\perp)^\perp = \{x \in E | f(x) = 0 \quad \forall\ f \in M^\perp\}$. Par conséquent, $M \subset (M^\perp)^\perp$. D'après la question 1, $M^{\perp\perp}$ est fermé. Par conséquent, $\bar{M} \subset (M^\perp)^\perp$ (si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$).

3. Démontrons que $(M^\perp)^\perp \subset \bar{M}$. Si ce n'est pas le cas, il existe $x_0 \in M^\perp)^\perp$ et $x_0 \notin \bar{M}$. Remarquons que M est convexe, et que $\bar{M}$ est convexe fermé. On peut alors appliquer le théorème de Han-Banach (version géométrique). Il existe un hyperplan qui sépare x_0 convexe compact avec $\bar{M}$, convexe fermé. Soit $f \in E'$, $f \neq 0$ telle que

$$f(x_0) < f(x) \quad \forall\, x \in M.$$

M étant un espace vectoriel et f étant linéaire, on a également

$$f(x_0) < \lambda.f(x) \quad \forall\, x \in M, \ \ \forall\, \lambda \in I\!R.$$

Or, l'inégalité précédente est impossible pour tout $x \in M$ et pour tout λ. En effet, il existe x tel que $f(x) \neq 0$. Il suffit alors de faire tendre λ vers $+\infty$ ou $-\infty$ suivant le signe de $f(x)$ pour obtenir une contradiction. Finalement,

$$(M^\perp)^\perp \subset \bar{M}.$$

D'après la question 2., on obtient la conclusion :

$$\bar{M} = (M^\perp)^\perp$$