Université de Picardie Jules Verne
UFR Sciences. Année 2024-2025

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

TD 7

Exercice 0
Soit un K-espace de Hilbert H.
1. Montrer que si une suite (u_n) de H converge faiblement vers u et est telle que $(\|u_n\|_H)$ tend vers $\|u\|_H$, alors (u_n) converge fortement vers u.
2. Montrer que si (u_n) de H converge faiblement vers u et si (v_n) converge fortement vers v, alors $((u_n, v_n)_H)$ converge vers $(u, v)_H$.
3. Soit C un sous-ensemble compact de H. Soit (u_n) une suite d'éléments de C convergeant faiblement vers u. Montrer que (u_n) converge fortement vers u.
4. Soient (e_n) un système orthonormé d'un espace de Hilbert. Montrer que (e_n) converge faiblement vers 0.

Exercice 1
On considère une fonction définie sur un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert H à valeurs réelles, différentiable sur H, coercive et convexe. Soit U un convexe fermé non vide de H. L'objectif de cet exercice est de montrer que le problème (P) : trouver $u \in U$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v),$$

admet au moins une solution.
1. Montrer qu'on peut se ramener à chercher u dans un ensemble borné de H.
On considère une suite minimisante de J, c'est-à-dire une suite (u_n) telle que

$$\lim_{n \to +\infty} J(u_n) = \inf_{v \in U} J(v).$$

2. Démontrer que la suite (u_n) admet une sous-suite qui converge faiblement vers un élément de H noté u.
3. Démontrer que $u \in U$.
4. Établir que

$$J(v) - J(u) \geq J'(u)(v - u), \quad \forall\, u, v \in U.$$

5. Déduire de ce qui précède que u est solution du problème (P).
6. Commenter le résultat obtenu et donner une condition sur J permettant d'assurer l'unicité de la solution du problème (P).

Exercice 2
Soit $\Omega \subset I\!R^n$ un ouvert. On considère l'espace S des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ telles qu'il existe $g_i \in L^2(\Omega)$ satisfaisant

$$\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega g_i \phi dx, \quad \forall\, \phi \in C_c^\infty(\Omega), \ \forall\, i = 1, \cdots, n.$$

On note $\frac{\partial u}{\partial x_i} := g_i \quad \forall\, i = 1, 2, \cdots, n$. On considère l'application ψ

$$(u, v) \mapsto \int_\Omega \left(u\, v + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx.$$

1. Montrer que ψ définit un produit scalaire sur S.
2. Montrer que S est un espace de Hilbert. On le note $H^1(\Omega)$ et il se nomme espace de Sobolev.

Dans la suite, on pose $\Omega =]0, 1[$ et on considère la forme bilinéaire a définie sur $H^1(]0, 1[) \times H^1(]0, 1[)$ par

$$a(u, v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) + u(x)v(x)dx,$$

où $p \in C^0([0, 1])$ satisfait la condition

$$p(x) \geq \alpha > 0, \quad \forall\, x \in [0, 1].$$

Soit $f \in L^2(0, 1)$ et l définie sur $H^1(]0, 1[)$ par

$$l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

On considère le problème (P) suivant : trouver $u \in H^1(]0, 1[)$ tel que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall\, v \in H^1(]0, 1[).$$

3. Montrer que le problème (P) admet une unique solution.
4. De quel problème d'optimisation la solution obtenue en 3. est-elle solution ?
5. Déterminer les valeurs de $(a, b) \in I\!R^2$ pour lesquelles le minimum de

$$I(a, b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx + \int_0^1 (2x - a)^2 dx$$

est atteint.