Université de Picardie Jules Verne
Année 2024-2025.

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

TD 6

Exercice 1

Soit K le corps $I\!R$ ou C et $(E, \|.\|)$ un K-espace vectoriel normé. La norme $\|.\|$ est dite hilbertienne s'il existe un produit scalaire sur E, noté $(.,.)$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \sqrt{(x,x)} = \|x\|.$$

1. Démontrer que la norme $\|.\|$ n'est pas une norme hilbertienne sur $C([0,1],,K)$.
2. Soit $p \in [1, +\infty[$, $p \neq 2$. Démontrer que la norme $\|.\|_p$ n'est pas hilbertienne sur l^p_K.
3. Démontrer que la norme duale $\|.\|_{H'}$ sur H' est une norme hilbertienne.

Remarque : Réciproquement, on peut montrer que si E est un espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_E$ et que cette norme satisfait l'identité du parallélogramme, alors cette norme est hilbertienne.

Exercice 2

Les questions A et celles du B. sont indépendantes.
A. Déterminer

$$\inf_{a,b,c} \int_{-1}^{1} (x^3 - (ax^2 + bx + c))^2 dx$$

Indication : on pourra introduire l'espace de Hilbert $L^2(]-1,1[)$ et appliquer le théorème de projection sur un convexe fermé convenablement choisi.

B. Soit Ω un ouvert de $I\!R^n$. On considère l'espace $L^2_{I\!R}(\Omega)$ muni du produit scalaire usuel.
On considère l'ensemble C défini par

$$C = \{v \in L^2_{I\!R}(\Omega) |\ |v(x)| \leq 1,\ p.p.\text{sur } \Omega\}.$$

1. Démontrer que C est un convexe non vide de $L^2_{I\!R}(\Omega)$.
2. Démontrer que C est fermé dans $L^2_{I\!R}(\Omega)$.

3. Pour tout $f \in L^2_{I\!R}(\Omega)$, justifier qu'il existe une unique solution du problème (P): trouver $u \in C$ tel que

$$\|u - f\| = \inf_{v \in C} \|f - v\|.$$

4. Pour tout $f \in L^2_{I\!R}(\Omega)$, déterminer u puis calculer $d(f, C)$.
5. Déterminer $C^{\perp}$.

Exercice 3
A. Soient H un espace de Hilbert sur $I\!R$ et a une forme bilinéaire définie sur $H \times H$, à valeurs réelles, coercive et continue sur H.
Énoncer le théorème de Lax-Milgram, puis donner les grandes étapes de la démonstration du théorème. On introduira un opérateur A défini sur H à valeurs dans H satisfaisant la relation

$$a(u, v) = (Au, v), \quad \forall\, u, v \in H.$$

puis on établira que cet opérateur est bijectif.

B. On considère l'application T définie sur l'espace de Hilbert $H = L^2(0, 1)$ par

$$T(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} u(x)dx - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 u(x)dx.$$

1. Montrer que T est une forme linéaire continue sur H.
2. Déterminer $u_0 \in L^2(0, 1)$ tel que $T(u) = (u_0, u)$ pour tout u, puis donner le noyau de T et son image. Que vaut $\|T\|$?
3. Soit $u(x) = 2x$. Calculer la projction de u sur $\ker T$ (justifier rigoureusement qu'elle existe).
4. On considère

$$a(u, v) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} u(x)v(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 u(x)v(x)dx.$$

Montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = T(v) \quad \forall\, v \in H.$$

5. Déterminer explicitement l'élément défini à la question 4.