Université de Picardie Jules Verne
UFR Sciences. Année 2024-2025

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

TD 5

Exercice 0
Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, on considÃ¨re l'application $J_x : E' \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f \to < J_x, f >:=< f, x > .$$

1. Démontrer que $J_x \in E''$ et calculer sa norme.
2. Démontrer que l'application $J : E \to E''$ définie $J(x) := J_x$ est linéaire et isométrique (J est appelée l'injection canonique de E dans E'').
3. Démontrer qu'il existe un $\mathbb{R}$-espace de Banach F tel que E est isomorphe et isométrique à un sous-espace vectoriel dense de F (F est appelé le complété de E).

Exercice 1
Soit $p \in]1, +\infty($. Soit L l'application de $l^p_{\mathbb{R}}$ dans lui-même définie par :

$$\begin{aligned} L : l^p_{\mathbb{R}} &\to l^p_{\mathbb{R}} \\ (x_n) &\mapsto (0, x_1, x_2, \cdots). \end{aligned}$$

1. Montrer que L est une application linéaire et continue sur $l^p_{\mathbb{R}}$.
2. Soit $k \geq 1$. Calculer $\|L^k\|_{\mathcal{L}(l^p_{\mathbb{R}})}$.
3. Soit $x \in l^p_{\mathbb{R}}$. Démontrer que la suite $(L^k(x))$ converge faiblement vers 0 dans $l^p_{\mathbb{R}}$.
4. Déterminer les éléments de $l^p_{\mathbb{R}}$ tels que la suite $(L^k(x))$ converge dans $l^p_{\mathbb{R}}$.
5. Démontrer que (L^k) ne converge pas dans $\mathcal{L}(l^p_{\mathbb{R}})$.
6. Reprendre les questions précédentes avec

$$\begin{aligned} L : l^p_{\mathbb{R}} &\to l^p_{\mathbb{R}} \\ (x_n) &\mapsto (0, \alpha x_1, \alpha x_2, \cdots), \end{aligned}$$

où $\alpha > 0$.

Exercice 2
Pour $p \geq 1$, on considère le $I\!R$-espace de Banach l^p introduit dans le TD 1.
On considère C défini par

$$C = \{x \in l^p : \; x_{k+1} \leq x_k \quad \forall\, k \geq 1\}.$$

1. Montrer que C est une partie de l^p.
2. Démontrer que C est une partie fermée pour la topologie faible de l^p.

Exercice 3
Pour tout $n \in I\!N$, on considère dans $(c_0, \|.\|_\infty)$

$$e^n = (e^n_k)_{k \in I\!N} := \begin{cases} 1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ si } k \neq n. \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(e^k)_{k \in I\!N}$ converge faiblement vers 0 dans c_0.
2. Pour tout $n \in I\!N$, on pose $u^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e^k$. Démontrer que (u^n) converge faiblement vers 0 dans c_0.
Pour tout $\alpha \in I\!R$ et $n \in I\!N$, on pose $v^n = (n+1)^\alpha u^n$.
3.1 Déterminer les valeurs de α telles que la suite (v^n) est bornée dans c_0.
3.2 Déterminer les valeurs de α telles que la suite (v^n) converge faiblement vers 0 dans c_0.