Université de Picardie Jules Verne
UFR Sciences. Année 2024-2025.

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

TD 4

Exercice 1 (D'après partiel)
On considère le $I\!R$-espace vectoriel normé

$$l^\infty := \{x = (x_n) : \ \ \forall\, n \geq 1 \quad x_n \in I\!R, \quad \sup_{n\geq 1} |x_n| < +\infty\},$$

muni de la norme $\|x\|_\infty := \sup_{n\geq 1} |x_n|$.
Soient

$$V := \{x = (x_n) \in l^\infty : \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} := s_\infty \in I\!R\}$$

et

$$c := \{x = (x_n) \in l^\infty : \quad \lim_{n\to\infty} x_n := x_\infty \in I\!R\}.$$

1. Démontrer que c et V sont deux $I\!R$-sous-espaces vectoriels de l^∞ et que $c \subset V$, inclusion stricte.
2. Soit $g : V \to I\!R$ définie par

$$\begin{aligned} & g : V \to I\!R \\ & (x_n) \mapsto \lim\nolimits_{n\to\infty} \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}. \end{aligned}$$

Démontrer que $g \in (V, \|.\|_\infty)'$ et calculer sa norme.
3. Démontrer qu'il existe une forme $f \in (l^\infty, \|.\|_\infty)'$ telle que

1. $\forall\, x = (x_n)_{n\geq 1} \in c \qquad f(x) = \lim_{n\to} x_n,$
2. $\|f\|_{(l^\infty)'} = 1.$

Exercice 2
Les deux parties A. et B. sont indépendantes.
A. Soit F un espace vectoriel normé sur $I\!R$. On note S_F la sphère unité de F. L'espace F est strictement convexe s'il satisfait la propriété suivante :

$$u, v \in S_F,\ u \neq v \ \implies \ \frac{u+v}{2} \notin S_F.$$

Soit E un espace vectoriel normé sur $I\!R$ tel que son dual E' est strictement convexe. Soient V un sous-espace vectoriel de E et f une forme linéaire continue sur V de norme 1.
1. Démontrer qu'il existe une forme linéaire et continue sur E, notée ψ de norme 1, prolongeant f.
2. Soient $\psi \in S_{E'}$ et $\phi \in S_{E'}$ deux prolongements de f. Démontrer que $\frac{\psi+\phi}{2} \in S'_E$.
3. Démontrer qu'il existe une unique forme linéaire ψ continue sur E, de norme 1 et prolongeant f. Qu'en concluez-vous?

B. Soient E un espace vectoriel de dimension infinie et F un sous-espace vectoriel dense dans E ($F \neq E$). Soit $x_0 \notin F$.
1. Montrer que $\{x_0\}$ et F sont deux convexes qui ne peuvent être séparés par un hyperplan fermé.
2. En déduire un exemple concret de deux convexes qui ne peuvent être séparés au sens large.

Exercice 3 (d'après partiel 2023)
Soit $C^0([0,1])$ le $I\!R$-espace vectoriel des fonctions continues muni de la norme de la convergence uniforme. On pose

$$V = \{f \in C^0([0,1]) |\ f(0) = 0\}.$$

1. Démontrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de $C^0([0,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme.
Soit L la fonction définie sur V par :

$$L(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

2. Montrer que L est linéaire et continue et calculer sa norme.
3. Est-ce qu'il existe une fonction f appartenant à V telle que $\|f\|_\infty = 1$ et $L(f) = \|L\|$?
4. Démontrer que $(C^0([0,1]), \|.\|_\infty$ n'est pas réflexif.