

## Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

### TD 3

#### Exercice 1

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . On considère l'espace des fonctions continues sur  $[a, b]$  à valeurs réels, noté  $C^0([a, b])$  et l'application  $\phi$  définie sur  $C^0([a, b])$  par  $f \mapsto \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt}$ .

1. Rappelez brièvement pourquoi l'application  $\phi$  définit une norme sur  $C^0([a, b])$ . On pose  $\phi(f) = \|f\|_2$ .
2. Comparer les normes  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$ .
3. Montrer que  $(C^0([a, b]), \|\cdot\|_2)$  n'est pas un espace complet.

#### Exercice 2

A. On considère un opérateur auto-adjoint  $T$  défini sur un espace de Hilbert  $H$ , c'est-à-dire un opérateur satisfaisant

$$(Tx, y) = (x, Ty), \quad \forall x, y \in H.$$

1. Montrer que le graphe de  $T$  est fermé.
2. Qu'en concluez-vous ?

B. On considère un opérateur  $T$  défini sur un espace de Hilbert  $H$ ,  $T$  étant positif, c'est-à-dire que

$$(Tx, x) \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

L'objectif de l'exercice est de montrer que  $T$  est continue. On considère une suite  $(x_n)$  de  $H$  telle que  $x_n \rightarrow x$  et  $Tx_n \rightarrow y$ . On pose  $z = y - Tx$ .

1. Montrer que

$$(z + T(x + h), x + h) \geq 0, \quad \forall h \in H.$$

On pose  $h = -x + tk$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k \in H$  et on suppose  $z \neq 0$ .

2. En choisissant convenablement  $t$ , obtenir une contradiction.

3. Conclure.

### Exercice 3

Soient  $E$  un espace de Banach et  $E_1$  et  $E_2$  deux sous-espaces vectoriels fermés de  $E$  tels que :

$$E_1 \cap E_2 = \{0\} \quad \text{et} \quad E = E_1 + E_2.$$

On munit le produit  $E_1 \times E_2$  de la norme  $\|(x_1, x_2)\| := \|x_1\|_E + \|x_2\|_E$ .

Soit  $P_i$  la projection sur  $E_i$ ,  $i = 1, 2$ .

1. Montrer que l'application  $T$  définie sur  $E_1 \times E_2$  à valeurs dans  $E$  par

$$T(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

est linéaire et bijective.

2. En déduire qu'il existe  $c > 0$  tel que :

$$\|x_1 + x_2\| \geq c(\|x_1\|_E + \|x_2\|_E), \quad \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2.$$

3. Montrer que  $P_1$  et  $P_2$  sont continues.

On dit que  $E_1$  et  $E_2$  sont supplémentaires topologiques, c'est-à-dire que les projections associées sont continues.

### Exercice 4

Pour tout  $x \in E := \mathbb{R}^2$ , on pose

$$\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|.$$

On note  $\{e_1, e_2\}$  la base canonique de  $E$  et  $\{e_1^*, e_2^*\}$  la base duale associée.

Soit  $V$  le sous-espace vectoriel engendré par  $e_1$ .

1. Justifier que  $e_1^* \in (V, \|\cdot\|_1)'$  et qu'il existe  $f_+$  et  $f_-$ , éléments de  $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)'$  tels que

$$f_{+|V} = e_1^*, \quad f_{-|V} = e_1^*,$$

et

$$\|f_+\|_{E'} = \|f_-\|_{E'} = \|e_1^*\|_{V'}.$$

2. Qu'en déduisez-vous ?