Université de Picardie Jules Verne
UFR sciences. Année 2024-2025.

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

Devoir N.2

Exercice 1
On considère la suite de $L^2(]0,1[)$ définie par $u_n(x) := \sin(2\pi nx)$. L'objectif est de montrer que (u_n) converge faiblement vers 0 dans $L^2(]0,1[)$.
On admettra le très important résultat suivant : $C_c^\infty(]0,1[)$ est dense dans $(L^p(]0,1[), \|.\|_{L^p})$ pour tout $p \geq 1$.
1. Montrer que pour tout $\phi \in C_c^\infty(]0,1[)$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(t)\phi(t)dt = 0.$$

2. En déduire le résultat attendu.
3. La suite (u_n) converge-t-elle fortement dans $L^2(]0,1[)$?
4. Rédiger la question 5 de l'exercice 2, TD N. 7.

Exercice 2
On suppose ici $\Omega =]0,1[$.Pour $(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, on pose

$$a(u,v) = \int_0^1 u'v'dx + \int_0^1 u(x)dx \int_0^1 v(x)dx.$$

1. Montrer que $a(.,.)$ est continue sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.
Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application linéaire continue. Soit (u_n) une suite qui converge faiblement vers 0 dans E.
2. Montrer que $(T(u_n))$ converge faiblement vers 0 dans F.

L'objectif des questions 3, 4, 5, 6 et 7 est de montrer que $a(.,.)$ est coercive.

On admettra que l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte, c'est-à-dire que de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

3. On suppose que $a(.,.)$ n'est pas coercive. Montrer qu'il existe une suite (v_n), $v_n \in H^1(\Omega)$ telle que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que

$$a(v_n, v_n) < \frac{1}{n}.$$

4. Démontrer qu'il existe une sous-suite de (v_n') qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers un élément $v \in L^2(\Omega)$ et faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers v.
5. Etablir que $\displaystyle\int_0^1 v_{n'}(x)dx \to 0$ et $\|v_{n'}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ quand $n \to +\infty$.
6. Montrer que $(v_{n'})$ est une suite de Cauchy dans $H^1(\Omega)$, et en déduire qu'elle tend vers v dans $H^1(\Omega)$ quand $n' \to +\infty$.
7. Montrer que $v = 0$, puis en déduire une contradiction.
8. Soit $f \in L^2(\Omega)$. On considère l'application l définie par $v \mapsto \int_0^1 f(x)v(x)dx$. Démontrer qu'il existe un unique élément $u \in H^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Exercice 3
1. Soit $p \geq 1$. On considère la suite de fonctions

$$u_n(t) = \sqrt{2n} I_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(t).$$

Étudier la convergence faible et forte de cette suite de fonctions dans $L^p(\mathbb{R})$.
2. Même question avec la suite de fonctions

$$u_n(t) = I_{[n,n+1]}(t).$$