Université de Picardie Jules Verne
UFR sciences. Année 2024-2025.

Master de Mathématiques : M1-Analyse Fonctionnelle

Devoir N.1

Exercice 1
1. En vous appuyant sur le TD, traiter les questions 4, 5 et 6 de l'exercice 1 du TD 1.
2. En suivant le cheminement abordé en TD, calculer la norme de D définie en B., exercice 1, en prenant pour norme sur E la norme N_3.

Exercice 2 (d'après partiel 2022)
Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Soient $C^0(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ et N une norme sur $C^0(I)$. On suppose que :
a. $(C^0(I), N)$ est un $\mathbb{R}$-espace de Banach.
b. Pour toute suite (f_n) qui converge dans $(C^0(I), N)$ vers une limite f, on a (f_n) converge simplement vers f sur I.
1. Démontrer que, pour tout $x \in E$, l'application $\delta_x : (C^0(I), N) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\delta_x(f) = f(x) \quad \forall\, f \in I$$

est linéaire et continue de $(C^0(I), N)$ dans $\mathbb{R}$ et puis que

$$\forall\, f \in I, \quad \sup_{x \in I} |\delta_x(f)| < +\infty.$$

2. En déduire que

$$\sup_{x \in I} \|\delta_x\|_{(C^0(I),N)'} < +\infty.$$

3. Démontrer que la norme N et la norme $\|.\|_\infty$ sont équivalentes sur $C^0(I)$.

Exercice 3
Soient E un espace vectoriel normé et $M \subset E$, un sous-espace vectoriel. E' représente l'ensemble des formes linéaires continues sur E.
On pose $M^\perp = \{f \in E' \mid f(x) = 0,\ \forall\, x \in M\}$. Pour $N \subset E'$, N sous-espace vectoriel, on pose $N^\perp = \{x \in E \mid f(x) = 0,\ \forall\, f \in N\}$.
1. Montrer que $M^\perp$ (respectivement $N^\perp$) sont des sous-espaces vectoriels

fermés de E' (respectivement de E).
2. Montrer que $\bar{M} \subset (M^{\perp})^{\perp}$.
3. Démontrer que $(M^{\perp})^{\perp} \subset \bar{M}$ (indication : raisonner par l'absurde et appliquer le théorème de Hahn-Banach).