Licence Sciences Technologie et Santé,      UPJV année 2024-2025.

# L3 : Analyse matricielle

### Devoir N.2

On considère une matrice $A$ à diagonale strictement dominante d'ordre $N$ et $\omega \in ]0,1]$. On décompose $A$ sous la forme $A = D - E - F$ avec $D$ la partie diagonale, $E$ et $F$ respectivement les parties inférieure et supérieure de la matrice $A$.
Soit $\mathcal{L}_\omega$ la matrice d'itération de la méthode de relaxation, donnée par

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega E)^{-1}\{(1-\omega)D + \omega F\}.$$

On pose $L = D^{-1}E$ et $U = D^{-1}F$.
1. Justifier que $L$ et $U$ existent, puis réécrire $\mathcal{L}_\omega$ en fonction de $L$ et $U$ et montrer que $p$, le polynôme caractéristique de $\mathcal{L}_\omega$ s'écrit sous la forme :

$$p(\lambda) = \det((Id - \omega L)^{-1}).\det(-\lambda(Id - \omega L) + (1-\omega)Id + \omega U).$$

2. Montrer que si $\mu$ est une valeur propre de $\mathcal{L}_\omega$ de module supérieur à 1, elle satisfait l'équation

$$\det(Id - \alpha(\mu)L - \beta(\mu)U) = 0,$$

où $\alpha(\lambda) := \frac{\lambda\omega}{\lambda+\omega-1}$ et $\beta(\lambda) := \frac{\omega}{\lambda+\omega-1}$.
On suppose que $\mathcal{L}_\omega$ admet une valeur propre notée $\mu$ de module supérieur à 1.
3. Montrer que $|\beta(\mu)| \leq |\alpha(\mu)| < 1$.
4. Montrer que la matrice $Id - L - U$ est à diagonale strictement dominante.
5. Montrer que sous l'hypothèse $|\mu| \geq 1$, $Id - \alpha(\mu)L - \beta(\mu)U$ est diagonale strictement dominante.
6. En déduire une contradiction, puis conclure.