L3 : Analyse matricielle

Devoir N.1

Exercice 1

Les parties A. et B. sont indépendantes. $\mathrm{cond}_p(A)$ représente le conditionnement de la matrice inversible A défini par $\|A\|_p.\|A^{-1}\|_p$, la norme $\|.\|_p$ étant la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $v \mapsto (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n) \in I\!R^n$.

Les questions de la partie A. sont indépendantes.

A. 1. Donner quelques propriétés du conditionnement de A. On considère la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\mathrm{cond}_1(A)$ et $\mathrm{cond}_2(A)$.

2. Soient $A, B \in M_n(I\!R)$ deux matrices inversibles. Montrer que

$$\mathrm{cond}(AB) \leq \mathrm{cond}(A).\mathrm{cond}(B).$$

3. Soient $A, B \in M_n(I\!R)$, A matrice inversible et $\|.\|$ une norme matricielle. Justifier que $\|BA - \mathrm{id}\|.\|A^{-1}\| \geq \|B - A^{-1}\|$, puis en déduire que

$$\frac{\|AB - \mathrm{id}\|}{\|BA - \mathrm{id}\|} \leq \mathrm{cond}(A).$$

Soient A et B deux matrices inversibles.

B. 1. Montrer que

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|.\|A - B\|.\|B^{-1}\|.$$

Soient A une matrice inversible et δA une matrice telles que $\|\delta A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

2. Montrer que la matrice $A + \delta A$ est inversible.

3. Déduire des questions 1. et 2. l'inégalité

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \delta A)^{-1}\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

4. En utilisant la relation $(A+\delta A)^{-1} = (I+A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$, établir l'inégalité

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\|\delta A\|}.$$

5. En déduire, en utilisant A. 3., l'inégalité

$$\frac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(1+\mathcal{O}(\|\delta A\|)\right).$$

Commenter le résultat obtenu.

Exercice 2

On considère une matrice carrée $P = (p_{i,j})$ à coefficients réels de dimension $n \geq 2$ satisfaisant les propriétés suivantes :
1. $p_{i,j} \geq 0, \ \ \forall\, i,j \in \{1,\cdots,n\}$.
2. $\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} = 1 \ \forall\, j \in \{1,\cdots,n\}$.

Soit $\alpha \in]0,1[$.
1. Justifier que $Id - \alpha P$ est une matrice inversible et donner l'expression de son inverse.
2. Montrer que $(Id-\alpha P)^{-1} \geq 0$.
3. Vérifier que ${}^t e P = {}^t e$, où $e = {}^t(1,\cdots,1)$. En déduire que P admet la valeur propre 1.
4. En déduire que $\|(Id-\alpha P)^{-1}\|_1 \geq \frac{1}{1-\alpha}$.
5. Établir que

$$\|(Id-\alpha P)^{-1}\|_1 = \frac{1}{1-\alpha}.$$