Licence Sciences Technologie et Santé, UPJV année 2024-2025.

L3 : Analyse matricielle

TD 6

Exercice 1

Soit $a \in I\!R$. On considère la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que B est définie positive si et seulement si $a \in I :=]-1, 2[$.
b. On suppose que $a \in I$. Décrire la méthode de relaxation pour résoudre le système linéaire $BX = b$ où $b \in I\!R^3$.
Pour quel valeur du paramètre de relaxation la méthode converge-t-elle ?
c. Donner la matrice de Jacobi pour résoudre le système $BX = b$ puis établir que son polynôme caractéristique p_J est donné par :

$$p_J(\lambda) = -\lambda^3 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}a^2)\lambda - \frac{a}{4}.$$

d. Vérifier que $\lambda_1 := \dfrac{a}{2}$ est racine de p_J, puis déterminer toutes les racines de p_J (on établira que les deux autres racines de p_J sont données par $\lambda_2 = -\dfrac{a}{4} + \dfrac{1}{4}\sqrt{a^2+8}$ et $\lambda_3 = -\dfrac{a}{4} - \dfrac{1}{4}\sqrt{a^2+8}$).
e. On suppose dans cette question que $a \geq 0$. Donner une condition sur a permettant d'assurer que la méthode de Jacobi appliquée au système linéaire $BX = b$ est convergente.

Exercice 2

Soit $r > 0$, H, V deux matrices réelles, symétriques telles que $rI + H$ et $rI + V$ soient inversibles. On suppose que $A := rI + H + V$ est symétrique définie positive.
On considère la méthode itérative suivante :

$$\begin{cases} (rI + H)x_{k+\frac{1}{2}} = -Vx_k + b, \\ (rI + V)x_{k+1} = -Hx_{k+\frac{1}{2}} + b. \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que la méthode (1) est convergente si et seulement si

$$\rho((rI+V)^{-1}H(rI+H)^{-1}V) < 1.$$

On pose $B = \frac{1}{r}H$ et $C = \frac{1}{r}V$.
2. Montrer que $B(I+B)^{-1}$ et $C(I+C)^{-1}$ sont symétriques.
3. Établir l'inégalité

$$\rho((rI+V)^{-1}H(rI+H)^{-1}V) \leq \rho(B(I+B)^{-1})\rho(C(I+C)^{-1}).$$

4. Montrer que $\rho(B(I+B)^{-1}) < 1$ équivaut à $\frac{1}{2}I + B$ symétrique définie positive.
5. Établir que si $\frac{r}{2}I + H$ et $\frac{r}{2}I + V$ sont définies positives, alors la méthode (1) converge.

Exercice 3

A. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, inversible et x_* la solution de $AX = b$.
Soit M et N deux matrices telles que $A = M - N$, avec M inversible et ${}^tM + N$ symétrique et définie positive.
Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $y = M^{-1}Ax$. Dans la suite, $B = M^{-1}N$.
1. Montrer que

$$(ABx, Bx) = (Ax, x) - (({}^tM + N)y, y). \tag{2}$$

On considère la méthode itérative

$$Mx_{k+1} = Nx_k + b.$$

2. Montrer que si A est symétrique définie positive, on a $\rho(B) < 1$. Qu'en déduisez-vous ?
3. Montrer que

$$(AB^px, B^px) \leq (Ax, x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

4. En déduire que si $\rho(B) < 1$, alors A est symétrique et définie positive.

B. Dans cette partie, on considère une matrice A symétrique et définie positive telle que $A = M - N = P - Q$ avec ${}^tM + N$ et ${}^tP + Q$ symétriques et définies positives.
On considère la méthode itérative

$$\begin{cases} Mx_{k+\frac{1}{2}} = Nx_k + b, \\ Px_{k+1} = Qx_{k+\frac{1}{2}} + b. \end{cases} \tag{3}$$

On pose $e_k = x_* - x_k$ et $e_{k+\frac{1}{2}} = x_* - x_{k+\frac{1}{2}}$.
1. Montrer que

$$\|e_{k+1}\|_A \leq \|e_{k+\frac{1}{2}}\|_A \leq \|e_{k+1}\|_A \quad \forall\, k \in I\!N^*,$$

où $\|.\|_A$ représente la norme induite par le produit scalaire $(x, y)_A = (Ax, y)$.
2. En déduire que la méthode (3) converge.