Licence Sciences Technologie et Santé, UPJV année 2024-2025.

L3 : Analyse matricielle

TD 5

Exercice 1

1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\rho(J) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$ où J et $\mathcal{L}_1$ représentent respectivement les matrices de Jacobi et de Gauss-Seidel.

2. On considère à présent la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(J)$.

3. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 2 (d'après partiel)

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 20 & 0 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une région du plan complexe dans laquelle se trouve toutes les valeurs propres de A. Qu'en déduisez-vous ?

2. On note D la matrice diagonale telle que $D_{ii} = A_{ii}$ pour tout $i = 1, \cdots, 4$. Donner une majoration du rayon spectral de $M = D^{-1}(D - A)$. Que vaut $\lim_{k\to+\infty} M^k$?

On considère le système linéaire $AX = b$ avec $b =^t (28, 28, 14)$ et on définit la suite de vecteurs par

$$x^{k+1} = Mx^k + D^{-1}b, \quad k \geq 0.$$

Soit $x^0 \in I\!R^3$. 3. Justifier que le système $Ax = b$ admet une unique solution notée x_* puis que

$$x_* = Mx_* + D^{-1}b.$$

Dans la suite $|.|$ désigne une norme vectorielle et $\|.\|$ la norme matricielle subordonnée.

4. En déduire que la suite des erreurs $e^k = x_* - x^k$ vérifie la relation de récurrence

$$e^{k+1} = Me^k,$$

puis, montrer que

$$|e^k| \leq \|M\|^k |e^0|, \quad \forall\, k.$$

5. Donner $\lim_{k \to +\infty} e^k$.

6. Résoudre le système $Ax = b$, puis donner une majoration de l'erreur $|e^k|$ dans le cas où la norme vectorielle considérée est la norme infinie.

7. Quelle méthode a-t-on appliquée ici ?

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre n à diagonale strictement dominante à coefficients complexes.

On considère les méthodes itératives de Jacobi et de Gauss-Seidel.

1. Sous quelle condition une méthode itérative de la forme $u_{k+1} = Bu_k + c$ est-elle convergente ?

2. Démontrer que la méthode de Jacobi converge.

3. Démontrer que la méthode de Gauss-Seidel converge.