Licence Sciences Technologie et Santé, UPJV année 2024-2025.

L3 : Analyse matricielle

TD 4

Exercice 1

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre par la méthode de Gauss le système $Ax = b$ où $b =^t (0\ 3\ 5\ 10)$.
2. Établir que la matrice A admet une factorisation LU, puis la déterminer.
3. Résoudre le système $Ax = b$ en utilisant la factorisation obtenue au 2.

Exercice 2

Soit A une matrice carrée d'ordre n à diagonale strictement dominante.

1. Démontrer que A admet une factorisation LU.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Donner une localisation des valeurs propres de A.
3. Montrer que A admet une factorisation LU, puis déterminer explicitement L et U.
4. Résoudre le système $Ax = b$ où $b =^t (1, 0, 0)$.
5. Montrer que A est symétrique définie positive.
6. Déterminer la factorisation de Cholesky de A puis résoudre le système $Au = b$ avec $b =^t (1, 0, 0)$ en utilisant la factorisation de A.

Exercice 3

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A admet une factorisation LU avec $L_{ii} = 1$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Déterminer L et U. On montrera que U est égale à

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Comparer les matrices L et U. Que remarquez-vous ?

On veut à présent généraliser le résultat obtenu aux questions 1. et 2. à des matrices symétriques, inversibles admettant une factorisation LU.

On considère la matrice diagonale Λ telle que $\Lambda_{ii} = \sqrt{|U_{ii}|}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

4. Justifier que Λ est une matrice inversible.

On pose $B = L\Lambda$ et $C = \Lambda^{-1}U$.

5. Montrer que ${}^tBC^{-1} = ({}^tC)^{-1}B$. Quelle est la structure des matrices ${}^tBC^{-1}$ et $({}^tC)^{-1}B$?
6. En déduire l'expression de ${}^tBC^{-1}$.

On considère la matrice diagonale S dont la diagonale est égale à $S_{ii} = \text{sgn}U_{ii}1$ pour tout i.

7. Montrer que A peut s'écrire sous la forme

$$A = D^t\tilde{D}$$

où D est triangulaire inférieure et où chaque colonne de $\tilde{D}$ est soit égale à la colonne correspondante de D, soit égale à la colonne correspondante de D changée de signe.