Licence Sciences Technologie et Santé,   UPJV année 2024-2025.

L3 : Analyse matricielle

TD 3

Exercice 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. L'objectif de cet exercice est de déterminer le spectre de la matrice $P(A)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg P = n \geq 1$.
Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Établir qu'il existe n nombres complexes z_i et c tels que

$$P(A) - zId = c\prod_{i=1}^{n}(A - z_i Id).$$

2. En déduire que si z est dans le spectre de $P(A)$, alors il existe $i_0 \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $P(\lambda_{i_0}) = z$.
3. Démontrer que

$$\text{spectre}(P(A)) = \{P(\lambda_i), \quad \lambda_i \in \text{spectre}(A)\}.$$

4. En déduire que pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\rho(A^k) = \rho(A)^k.$$

Exercice2

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et de vecteurs propres associés p_1, $p_2, \cdots, p_n$ vérifiant $p_i^* p_j = \delta_{ij}$.
Soit R_A le quotient de Rayleigh associé à la matrice A.
Pour $k = 1, \cdots, n$, on note V_k le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs p_i, $1 \leq i \leq k$ privé de 0.
0. Montrer que $R_A(v) \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$.
1. Etablir que $\lambda_k = R_A(p_k)$ puis que $\lambda_k = \max_{v \in V_k} R_A(v)$.
2. Montrer que

$$\lambda_k = \min_{v \perp V_{k-1}} R_A(v).$$

3. Montrer que
$$\{R_A(v); v \in \mathbb{C}^n - \{0\}\} = [\lambda_1, \lambda_n].$$
(indication : on rappelle que l'image d'un ensemble connexe par une application continue est un ensemble connexe).
Soit $\|.\|_2$ la norme euclidienne. On considère la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_2$.
4. Soit $A \in M_n(I\!R)$. Établir que
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tA.A)}.$$
5. On suppose dans cette question que la matrice A est symétrique. Établir que
$$\|A\|_2 = \rho(A).$$

Exercice 3

On considère une matrice carrée, à coefficients réels A. On dit que A est monotone si elle est inversible et si la matrice A^{-1} est positive (c'est-Ã -dire que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs).
On se propose de montrer que $A \in M_n(I\!R)$ est monotone si et seulement si l'inclusion suivante est satisfaite :
$$\{v \in I\!R^n,\ Av \geq 0\} \subset \{v \in I\!R^n;\ v \geq 0\}.$$
1. Montrer que si A est monotone, l'inclusion ci-dessus est vérifiée.
On suppose à présent l'inclusion satisfaite.
2. Montrer que le noyau de A est réduit à $\{0\}$.
3. Pour $j \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $b_j = A^{-1}e_j$ où e_j est le j-ième vecteur de la base canonique.
Montrer que $b_j \geq 0$, puis en déduire que A^{-1} est positive.
4. Soit $c > 0$. On considère la matrice $A_c = (a_{i,j})$ tridiagonale définie par $a_{ii} = 2 + c$ pour $i = 1, \cdots, n$, $a_{i-1,i} = -1$ pour $i = 2, \cdots, n$ et $a_{i,i+1} = -1$ pour $i = 1, \cdots, n-1$ (tous les autres coefficients sont nuls).
Montrer que cette matrice est monotone.
5. On considère la matrice A_c définie à la question 4, et on pose $c = 0$. Pour $v \in I\!R^n$, établir l'identité
$$(Av, v) = v_1^2 + v_n^2 + \sum_{i=2}^{n} (v_i - v_{i-1})^2.$$
En déduire que A_0 est définie positive.
6. Déduire de ce qui précède que A_0 est monotone.