Licence Sciences Technologie et Santé, UPJV année 2024-2025.

L3 : Analyse matricielle

TD 2

Exercice 1

Soit $\|.\|$ une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une norme satisfaisant de plus la condition

$$\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|, \quad \forall\, A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$. On rappelle que dans ce cas, la matrice $I - A$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A \geq 0$ et $\|A\| < 1$, $\|.\|$ une norme matricielle quelconque.

1. Montrer que $I - A$ est une matrice inversible telle que $(I - A)^{-1} \geq 0$.

Le but de la question suivante est de montrer que l'application ϕ définie sur le groupe linéaire par $\phi(A) = A^{-1}$ est différentiable en tous points (et donc à fortiori continue) et que

$$\phi'(A).H = -A^{-1}HA^{-1}. \tag{1}$$

2. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\|H\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Établir que

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}HA^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n(A^{-1}H)^n\, A^{-1}.$$

3. En déduire (**??**).

Exercice 2

On rappelle qu'il a été établi dans le cours que

$$\lim_{k \to +\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A),$$

où $\rho(A)$ désigne le module de la plus grande valeur propre de A (le rayon spectral de A).

On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par

$$A \mapsto \sqrt{\sum_{i,j=1,\cdots,n} a_{ij}^2}.$$

1. Montrer que cette application définie une norme matricielle sur $M_n(I\!R)$ non subordonnée à une norme vectorielle.
Dans la suite, on pose $\|A\|_E := \sqrt{\sum_{i,j=1,\cdots,n} a_{ij}^2}$.
On dit que deux matrices de $M_n(I\!R)$ A et B satisfont $A \leq B$ si $a_{ij} \leq b_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2$.
On suppose dans les questions suivantes que $0 \leq A \leq B$.
2. Montrer que $A^n \leq B^n$ pour tout $n \in I\!N^*$, puis que $\|A^n\|_E \leq \|B^n\|_E$ pour tout $n \in I\!N^*$.
3. Déduire de ce qui précède que $\rho(A) \leq \rho(B)$.
4. Établir que

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n}\|A\|_2, \quad \forall\, A \in M_n(I\!R),$$

où $\|.\|_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne.

Exercice 3
1. Soit $A \in M_n(I\!R)$. Montrer que l'application $A \mapsto \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$ définit une norme matricielle sur $M_n(I\!R)$.
2. Démontrer que

$$\|A\|_1 := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|.$$

3. Démontrer que

$$\|A\|_\infty := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

B. On considère une norme sur $I\!R^n$, notée $\|.\|$ et soit $P \in M_n(I\!R)$ une matrice inversible.
1. Montrer que l'application définie sur $I\!R^n$ par $v \mapsto \|Pv\|$ est une norme sur $I\!R^n$. On notera cette nouvelle norme $\|.\|_*$.
2. Établir que la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|_*$ est donnée par

$$\|A\|_* = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} = |||PAP^{-1}|||$$

où $|||.|||$ est la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle $\|.\|$.