Licence Sciences Technologie et Santé, UPJV année 2024-2025.

L3 : Analyse matricielle

TD 1

Exercice 1
Pour $a \in I\!R$, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^4, puis montrer que A admet un inverse si et seulement si $a \neq 0$.
2. Pour $a \neq 0$, calculer A^{-1}, puis A^n pour n entier quelconque.

Exercice 2
On considère une matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on introduit le disque

$$D_i = \{z \in \mathbb{C},\ |b_{ii} - z| \leq \sum_{j \neq i} |b_{ij}|\}.$$

1. Montrer que toute valeur propre de B appartient à l'un au moins des disques D_i (ces disques sont appelés disques de Gershgorin).
2. On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante.
Montrer que A est inversible.
On considère la matrice A à coefficients réels définies par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Établir (sans calculs) que A est inversible puis montrer que les valeurs propres de A sont incluses dans l'intervalle $[1, 5]$.
4. Donner une autre démonstration que celle donnée au 1. pour établir qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

Exercice 3
On considère le sous-ensemble $GL_n(K)$ constitués des matrices inversibles ($K = I\!R$ ou $\mathbb{C}$).
1. Montrer que $GL_n(K)$ muni de la loi de composition interne . possède une structure de groupe.

Le but des questions qui suivent est de donner des propriétés topologiques du groupe linéaire.
2. On considère une matrice inversible A_0. En utilisant l'égalité

$$A = ((A - A_0)A_0^{-1} + Id).A_0,$$

montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ (respectivement $GL_n(\mathbb{C})$) est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ (respectivement de $M_n(\mathbb{C})$).
On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R})$ par $A \mapsto \det(A)$.
3. Donner l'image de $GL_n(\mathbb{R})$ par cette application puis en déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-ensemble connexe de $M_n(\mathbb{R})$.
Soit $A \in M_n(K)$ une matrice non inversible. On pose $B_n := A + \frac{1}{n}Id$.
4. a. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, la matrice B_n est inversible.
b. En déduire que $GL_n(K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ouvert dense de $M_n(K)$.
On considère le groupe orthogonal $O(n)$ constitué des matrices M à coefficients réels satisfaisant l'égalité ${}^tM.M = I$.
On considère l'application définie sur $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ par

$$(M, N) \mapsto tr({}^tM.N),$$

où $tr(A)$ représente la trace de A.
5. a. Montrer que cette application est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.
b. Montrer que $O(n)$ est un sous-ensemble compact de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4
Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, deux matrices triangulaires inférieures.
1. Montrer que le produit $A.B$ est une matrice triangulaire inférieure et que $(A.B)_{ii} = a_{ii}.b_{ii}$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.
On suppose de plus que $A = (a_{ij})$ est inversible.
2. Montrer que l'inverse de A est triangulaire inférieure et que de plus

$$A_{ii}^{-1} = \frac{1}{a_{ii}}, \quad \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}.$$

3. Soit $C \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique. On suppose qu'il existe une matrice B triangulaire inférieure satisfaisant $b_{ii} > 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et telle que

$$C = B.{}^tB.$$

Montrer qu'une telle matrice est *unique*.