Université de Picardie Jules Verne. Année 2024-2025.

L3 : Analyse Matricielle

Correction devoir N.1

Exercice 1

A. 1. Pour les propriétés du conditionnement, voir le Cours de Monsieur Chehab. On rappelle ici qu'une matrice est bien conditionnée si son conditionnement est proche de 1 (il est toujours supérieur à 1).
On trouve par des calculs élémentaires que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'après le cours (voir également les TDs), on obtient $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{2} |a_{i,j}| = 6$ et $\|A^{-1}\|_1 = \frac{7}{2}$, donc le conditionnement vaut 21. La matrice est donc mal conditionnée pour cette norme. Pour l'autre norme, il a été établi dans le cours que

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}.$$

où $\mu_n(A)$ et $\mu_1(A)$ désignent respectivement la racine carré de la plus grande et la plus petite valeur singulière de la matrice A (autrement dit la racine carrée de la plus petite et la plus grande valeur propre de ${}^tA.A$).
Calculons les valeurs propres de la matrice ${}^tA\,A$. Le polynôme caractéristique de cette matrice est donné par $x^2 - 30x + 4 = 0$. Les valeurs propres sont données par $\lambda_1 = 15 - \sqrt{221}$ et $\lambda_2 = 15 + \sqrt{221}$. On obtient donc

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\sqrt{15 + \sqrt{221}}}{\sqrt{15 - \sqrt{221}}}.$$

2. On a compte tenu de $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$ pour $A, B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{cond}(AB) = \|AB\|.\|B^{-1}.A^{-1}\| \leq \|A\|.\|B\|.\|B^{-1}\|.\|A^{-1}\| = \mathrm{cond}(A).\mathrm{cond}(B).$$

3. De $B - A^{-1} = (BA - \mathrm{id}).A^{-1}$, on déduit immédiatement l'inégalité demandée. On majore le numérateur par $\|A\|\|B - A^{-1}\|$ et combinant les deux inégalités, on obtient le résultat demandé.

B. 1. On a l'identité évidente mais utile

$$B^{-1} - A^{-1} = A^{-1}.(A - B).B^{-1}$$

Il en résulte aussitôt que

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|.\|A - B\|.\|B^{-1}\|.$$

Soient A une matrice inversible et δA une matrice telles que $\|\delta A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.
2. On a l'égalité $A + \delta A = A(Id + A^{-1}\delta)$. Il a été établi en cours que si $\|A\| < 1$ pour $\|.\|$ norme matricielle sous-multiplicative quelconque, alors $Id - A$ et $Id + A$ sont inversibles, et $(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ (on montre au cours de la preuve que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ converge).
La condition $\|A\| < 1$ se traduit ici par $\|A^{-1}\delta\| < 1$, ce qui est le cas puisque par hypothèse

$$\|A^{-1}\delta\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta\| < 1.$$

3. D'après ce qui précède, on obtient : $\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\| \leq \|(A + \delta A)^{-1}\|\|A^{-1}\|\|\delta A\|$, d'où

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A + \delta A)^{-1}\|} \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|\frac{\|A\|}{\|A\|},$$

ce qui est le résultat recherché.
4. On a $(A + \delta A)^{-1} = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}$. On a vu en cours que si $\|B\| < 1$, alors $id + B$ est inversible et

$$\|(id + B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B\|}.$$

Comme $\|A^{-1}\delta A\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta A\|$, on déduit de l'hypothèse que $\|A^{-1}\delta A\| < 1$. On déduit de ce résultat que

$$\|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\delta A\|} \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}.$$

On en déduit l'inégalité

$$\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}.$$

5. Compte tenu des résultats obtenus aux questions 3 et 4, on déduit que

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|}$$

Or

$$\frac{1}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} = 1 + \mathcal{O}(\delta A).$$

Conclusion :

$$\frac{\|(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \mathrm{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\left(1 + \mathcal{O}(\|\delta A\|)\right).$$

L'erreur relative sur le résultat est majorée par le conditionnement de A multiplié par l'erreur relative sur la donnée A.

Exercice 2
1. Remarquons que compte tenu des hypothèses, on a $\|P\|_1 = 1$. Comme $\alpha \in]0, 1[$, on en déduit que $\|\alpha P\|_1 < 1$. On a vu en TD que si $A \in M_n(I\!R)$ satisfait $\|A\| < 1$ $\|.\|$ norme matricielle

quelconque, alors $Id - A$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} A^k$. On déduit donc que $Id - \alpha P$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha P)^k$.

2. Comme $\alpha P \geq 0$ ($\alpha > 0$ et d'après l'hypothèse 1, $P \geq 0$), on déduit de l'expression $\sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha P)^k$ que $(Id - \alpha P)^{-1} \geq 0$.

3. L'hypothèse 2 entraÃ®ne immédiatement que ${}^t eP = {}^t e$, où $e = {}^t (1, \cdots, 1)$. Par conséquent, la matrice ${}^t P$ admet la valeur propre 1. Or les matrices P et ${}^t P$ possèdent le mÃªme polynôme caractéristique puisque $\det(A) = \det {}^t A)$ et donc $\det(A - \lambda I) = \det({}^t (A - \lambda I)) = \det({}^t A - \lambda I)$. Donc 1 est également valeur propre de P.

4. Soit u un vecteur propre associé à la valeur propre 1 ($Pu = u$). On a $(I - \alpha P)u = (1 - \alpha)u$. Par conséquent, $(Id - \alpha P)^{-1})u = \frac{1}{1-\alpha} u$. On en déduit que

$$\|(Id - \alpha P)^{-1}\|_1 \geq \frac{\|(Id - \alpha P)^{-1})u\|_1}{\|u\|_1} = \frac{1}{1 - \alpha}. \tag{1}$$

5. Pour établir l'inégalité demandée, il faut inverser l'inégalité dans (1). D'après la question 1, on a

$$\|(Id - \alpha P)^{-1}\|_1 = \| \sum_{k=0}^{+\infty} (\alpha P)^k \|_1 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \|P\|_1^k = \frac{1}{1 - \alpha},$$

d'où le résultat demandé.