Université de Picardie Jules Verne
UFR Sciences
Année 2023-2024.

L2 : Analyse Numérique

Examen 13 Mai 2024

Durée 2 heures

Exercice 1

A. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $(x_i)_{0\le i\le n}$ $n+1$ points distincts de $[a,b]$. On pose $I(f) = \int_a^b f(t)dt$.

Démontrer qu'une formule de quadrature à $n+1$ points de la forme $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)$ est exacte sur $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si

$$\alpha_i = \int_a^b l_i(t)dt \quad \forall\, i \in \{0,\cdots,n\}, \tag{1}$$

où l_i représente le ième polynôme élémentaire de Lagrange.
On suppose les réels α_i satisfont (1) pour tout i. Comment choisir les $n+1$ points x_i de telle sorte que la formule de quadrature soit d'ordre la plus élevée possible ? Quelle est alors son ordre ?

B. Soit $f \in C^0([-1,1])$. On approche $\int_{-1}^{1} f(t)dt$ par la formule de quadrature

$$b_1 f(-1) + b_2 f(\zeta).$$

1. Déterminer les constantes b_1, b_2 et ζ de telle sorte que la formule de quadrature soit d'ordre le plus élevé possible.
2. Déterminer le noyau de Péano associé à cette méthode. Vous établirez que

$$\begin{cases} K(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3 \quad \text{si } \; t \in [\frac{1}{3}, 1] \\ K(t) = \dfrac{(t+1)^2(1-2t)}{12} \quad \text{si } \; t \in [-1, \dfrac{1}{3}] \end{cases}$$

3. Vérifier que K est de signe constant sur $[-1, 1]$, puis en déduire une expression de l'erreur $E(f)$ définie par

$$E(f) := \int_{-1}^{1} f(t)dt - b_1 f(-1) - b_2 f(\zeta).$$

Exercice 2
On se propose de résoudre l'équation

$$x \cosh(x) = 1, \tag{2}$$

où $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
0. Démontrer que l'équation (2) admet une unique solution dans $[0, 1]$.
1. Décrire la méthode de Newton appliquée à l'équation (2) et donner une valeur approchée des deux premiers termes de la suite en partant de $x_0 = 0$.
2. Donner des valeurs de $x_0 \in [0, 1]$ telle que la méthode de Newton converge (justifier soigneusement votre réponse en énonçant un théorème).
3. Pouvez-vous proposer une autre méthode afin de résoudre numériquement (2) ? Développer votre réponse.

Exercice 3
Pour $x \geq 0$, on définit la fonction f par

$$f(x) = x - e^{-(1+x)}.$$

1. Étudier la fonction f et tracer son graphe.
2. Montrer qu'il existe une unique solution notée l à l'équation $f(x) = 0$, puis localiser l entre deux entiers successifs.
Pour trouver une approximation de l, on propose la méthode itérative suivante:

$$(A) \begin{cases} x_0 \in [0, +\infty[\\ x_{n+1} = g(x_n), \quad \text{où} \quad g(x) = e^{-(x+1)} \end{cases}$$

3. Énoncer le théorème du point fixe.
4. Établir que la suite (x_n) converge vers l.
5. La méthode (A) converge-t-elle vers l?
6. Donner un entier n_0 satisfaisant la condition

$$|x_n - l| \leq 10^{-4}, \quad \forall n \geq n_0.$$

7. Comparer la méthode précédente à celle de dichotomie. Laquelle est la plus avantageuse ? Justifier soigneusement votre réponse.