

Université de Picardie Jules Verne

UFR Sciences

Année 2023-2024.

L2 : Analyse Numérique

Examen seconde session 27 Juin 2024

Durée 2 heures

Exercice 1

A. (Interpolation de Lagrange).

0. Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ $n + 1$ points distincts de $[a, b]$ ($a < b$). Rappeler la définition de l_i ($i \in \{0, \dots, n\}$), le i ème polynôme élémentaire de Lagrange, puis montrer que le système de vecteurs $\{l_0, \dots, l_n\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + 1)$.

Déterminer le polynôme de Lagrange P interpolant la fonction f aux points $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.

On donne $\ln 2 = 0.6931$.

2. Calculer $P(0.56)$. Majorer $|f(0.56) - P(0.56)|$ en vous appuyant sur un théorème du cours que l'on énoncera précisément.

B. On considère 4 points $x_0 < \dots < x_3$ appartenant à $[-1, 6]$ et f une fonction définie sur $[-1, 6]$ à valeurs réelles.

On donne $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ et $f(x_0) = -5$, $f(x_1) = 17$, $f(x_2) = 115$ et $f(x_3) = 143$.

1. Donner la valeur en $x = 2$ du polynôme de Newton P_3 qui interpole f en x_0 , x_1 , x_2 et x_3 .

2. Donner l'expression de l'erreur $|f(x) - P_3(x)|$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Soit $f \in C^2([-1, 1])$. On approche $\int_{-1}^1 f(t)dt$ par $f(-1) + f(1)$.

1. Donner l'ordre de cette méthode de calcul approché d'une intégrale.

2. Déterminer le noyau de Péano de cette méthode.

3. Montrer que l'erreur $E(f) := \int_{-1}^1 f(t)dt - (f(-1) + f(1))$ est donnée par

$$-\frac{2}{3}f^{(2)}(\zeta), \quad \zeta \in [-1, 1].$$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in C^2([a, b])$. On considère la fonction ϕ définie sur $[-1, 1]$ par

$$\phi(x) = \frac{b-a}{2}x + \frac{b+a}{2}.$$

On pose $g = f \circ \phi$.

4. Justifier que g est bien définie, de classe C^2 puis démontrer que

$$\int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) = -f^{(2)}(\eta) \frac{(b-a)^3}{12}, \quad \eta \in [a, b].$$

Quelle méthode vient-on d'étudier ?

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^{-x} - \sin x.$$

1. Montrer que la fonction f admet une unique racine dans l'intervalle $I := [0, 1]$.

Afin de déterminer une valeur approchée de cette racine qu'on notera α , on introduit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, $u_0 \in [0.5, 0.7]$ où g est définie par $g(x) = x + e^{-x} - \sin x$.

2. Énoncer le théorème du point fixe.

3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α .

4. Déterminer n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n - \alpha| \leq 10^{-3}.$$

5. Décrire la méthode de Newton appliquée à l'équation $f(x) = 0$. Donner des valeurs de x_0 permettant d'assurer la convergence de la méthode.

6. Déterminer α à 10^{-2} près (utiliser la méthode de votre choix).

7. Des deux méthodes proposées ici, laquelle est la plus satisfaisante ? (justifier soigneusement votre réponse).